

DM4 - Etudes de fonctions

2025-2026



Exercice 1 :

Première partie : un encadrement de sh

1. a) Montrez que l'équation $2\operatorname{sh}(x) + 1 = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note a cette solution (on ne cherchera pas la valeur exacte de a ...)
- b) Justifiez que la fonction $u : x \mapsto \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x$ est dérivable et montrez que pour tout réel x , $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh} x \geq 0$
2. Soit $f : x \mapsto e^{\operatorname{sh}(x)} - x - 1$.
 - a) Justifiez que f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et calculez $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
 - b) En déduire les variations de f' , puis de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrez que $1 + x \leq e^{\operatorname{sh}(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
4. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - x \leq \frac{1}{e^{\operatorname{sh}(x)}},$$

puis que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$1 + x \leq e^{\operatorname{sh}(x)} \leq \frac{1}{1 - x}$$

5. Conclure que $\forall x \in]0, 1[$,

$$\ln(1 + x) \leq \operatorname{sh}(x) \leq -\ln(1 - x)$$

Deuxième partie : étude d'une somme

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $n \geq 2$.
On considère la somme

$$S_n = \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$$

1. Justifiez que $\forall k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq -\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

2. En déduire que $\forall n \geq 2$,

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq S_n \leq -\ln\left(\frac{n-1}{np}\right)$$

3. Déterminer la limite de S_n quand $n \rightarrow +\infty$

Première partie

1. a) Considérons la fonction $x \mapsto 2\operatorname{sh}(x) + 1$.

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 2\operatorname{ch}(x)$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\operatorname{ch}(x) > 0$, donc la fonction est strictement croissante.

De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2\operatorname{sh}(x) + 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\operatorname{sh}(x) + 1 = +\infty$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection monotone, $x \mapsto 2\operatorname{sh}(x) + 1$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans l'image de $\mathbb{R}$ qui est $\mathbb{R}$ également, grâce aux limites et à la continuité de la fonction.

Comme 0 est dans $\mathbb{R}$ (...), l'équation $2\operatorname{sh}(x) + 1 = 0$ admet bien une unique solution.

- b) La fonction u est dérivable comme produit et somme de fonction dérivable, et on a

$$u'(x) = 2\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch}(x)(2\operatorname{sh}(x) + 1)$$

Comme $\operatorname{ch}(x) > 0$, $u'(x)$ est du signe de $2\operatorname{sh}(x) + 1$, c'est à dire u décroissante sur $] -\infty, a]$, croissante sur $[a, +\infty[$

Elle a donc un minimum en a , et ce minimum vaut $u(a) = \operatorname{ch}(a)^2 + \operatorname{sh}(a)$.

Or $\operatorname{sh}(a) = -\frac{1}{2}$, et $\operatorname{ch}(a) \geq 1$ (1 est le minimum de ch), donc $\operatorname{ch}(a)^2 \geq 1$ et $u(a) \geq 1 - \frac{1}{2} > 0$.

Notez qu'on peut aussi utiliser le fait que $\operatorname{ch}^2(x) = 1 + \operatorname{sh}^2(x)$ pour montrez qu'en réalité,

$$u(a) = \frac{3}{4}$$

On a bien $\boxed{\operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}(x) > 0}$

Vous êtes plusieurs aussi à utiliser un chemin totalement différent, qui marche bien également.

En utilisant $\text{ch}^2(x) = 1 + \text{sh}^2(x)$, on arrive

$$u(x) = \text{sh}^2(x) + \text{sh}(x) + 1$$

Depuis là, deux chemins, on peut :

- poser $X = \text{sh}^2(x)$ pour tomber sur un polynôme avec $\Delta < 0$, donc toujours positif pour tout X , donc $u(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- écrire $u(x) = (\text{sh}^2(x) + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ (c'est en fait une forme canonique cachée) pour en déduire immédiatement $u(x) > 0$.

2. a) Par composition de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable autant de fois que l'on veut... Donc deux fois ;-)

On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \text{ch}(x)e^{\text{sh}(x)} - 1 \text{ et } f''(x) = \text{sh}(x)e^{\text{sh}(x)} + \text{ch}^2(x)e^{\text{sh}(x)} = (\text{sh}(x) + \text{ch}^2(x))e^{\text{sh}(x)}$$

- b) D'après la question 1b et comme $e^{\text{sh}(x)} > 0$, on a $f''(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ainsi f' est strictement croissante.

Or $f'(0) = 1e^0 - 1 = 0$, donc $f'(x) < 0$ pour $x < 0$, et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.

La fonction f est donc décroissante sur $] -\infty, 0]$, puis croissante sur $[0, +\infty[$.

3. D'après l'étude précédente, f admet un minimum en 0 et on trouve $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, c'est à dire $e^{\text{sh}(x)} - x - 1 \geq 0$.

On en déduit bien

$$\boxed{1 + x \leq e^{\text{sh}(x)}}$$

4. L'inégalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ aussi.

Donc on peut remplacer dans l'inégalité précédente :

$$1 - x \leq e^{\text{sh}(-x)}$$

Or $\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$ et $e^{-\text{sh}(x)} = \frac{1}{e^{\text{sh}(x)}}$

On en déduit

$$1 - x \leq \frac{1}{e^{\text{sh}(x)}}$$

Attention : on a envie maintenant de passer à l'inverse, ce qui n'est pas possible pour tout $x \in \mathbb{R}$. ça tombe bien : on veut le faire pour $x \in]0, 1[$

Pour tout $x \in]0, 1[$, $1 - x > 0$ et $\frac{1}{e^{\text{sh}(x)}} > 0$ également : on peut appliquer l'inverse qui est décroissant sur $]0, +\infty[$:

$$\frac{1}{1 - x} \geq \frac{1}{\frac{1}{e^{\text{sh}(x)}}} \quad \text{donc } e^{\text{sh}(x)} \leq \frac{1}{1 - x}$$

En combinant l'inégalité obtenue en 3 avec celle ci, on a donc

$$\boxed{1 + x \leq e^{\text{sh}(x)} \leq \frac{1}{1 - x}}$$

5. Pour tout $x \in]0, 1[$, $1 + x > 0$, tout comme $e^{\text{sh}(x)}$ et $\frac{1}{1 - x}$: on va pouvoir appliquer la fonction $\ln$ à l'inégalité précédente. Comme cette fonction est croissante, on obtient

$$\boxed{\ln(1 + x) \leq \text{sh}(x) \leq -\ln(1 - x)}$$

Partie 2 :

Assez impressionnante a priori, mais bien moins technique que la partie 1 !

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \in]0, 1[$, donc on peut remplacer dans l'inégalité obtenue en fin de première partie, et on a immédiatement

$$\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \leq \operatorname{sh} \left(\frac{1}{k} \right) \leq -\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right)$$

2. Effectuons la somme de ces inégalités pour k variant de n à np .

Il vient

$$\sum_{k=n}^{np} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \leq \sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh} \left(\frac{1}{k} \right) \leq \sum_{k=n}^{np} -\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right)$$

On reconnaît S_n au milieu.

Pour les autres sommes :

$$\sum_{k=n}^{np} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=n}^{np} \ln \left(\frac{k+1}{k} \right) = \sum_{k=n}^{np} \ln(k+1) - \ln(k)$$

On reconnaît un télescope et il vient

$$\sum_{k=n}^{np} \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln(np+1) - \ln(n) = \ln \left(\frac{np+1}{n} \right)$$

De même,

$$\sum_{k=n}^{np} -\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=n}^{np} -\ln \left(\frac{k-1}{k} \right) = \sum_{k=n}^{np} \ln(k) - \ln(k-1)$$

A nouveau un télescope et

$$\sum_{k=n}^{np} -\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) = \ln(np) - \ln(n-1) = \ln \left(\frac{np}{n-1} \right) = -\ln \left(\frac{n-1}{np} \right)$$

On obtient bien l'encadrement voulu.

3. Il reste à calculer les limites de tout ça :

$$\frac{np+1}{n} = \frac{n(p+\frac{1}{n})}{n} = p + \frac{1}{n}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{np+1}{n} = p \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{np+1}{n} \right) = \ln(p)$$

$$\text{De même } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{np} = \frac{1}{p} \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} -\ln \left(\frac{n-1}{np} \right) = -\ln \left(\frac{1}{p} \right) = \ln(p)$$

Par le théorème des gendarmes, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(p)$$



Exercice 2 : Trigonométrie réciproque et calcul de dérivées

Soient les fonctions u et f définies par

$$u : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ et } f : x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de u , justifiez qu'elle est dérivable sur $] -1, 1[$ et calculer sa dérivée. On simplifiera au maximum l'expression obtenue.
2. Déterminez l'ensemble de définition de f et justifiez qu'elle est dérivable sur l'intervalle $] -1, 1[$.
3. Calculez f' et en déduire une expression plus simple de f .

1. $u(x)$ existe si et seulement si $x \neq -1$ et $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$.

Un tableau de signe donne alors $x \in]-1, 1]$, qui est donc l'ensemble de définition de u .

De plus, u est dérivable sur $] -1, 1[$ par composition de fonctions dérivables (le 1 est exclu a priori puisque la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0, mais on ne sait pas si c'est vraiment non dérivable... et ce n'est pas demandé!).

On a alors, pour tout $x \in] -1, 1[$:

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \times \frac{-1-x-(1-x)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \times \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}(1+x)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \times \frac{1}{1+x} \\ u'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

2. la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur le même ensemble que u , c'est à dire sur $] -1, 1]$.

Elle est dérivable sur $] -1, 1[$ par composition de fonctions dérivables.

3. Pour tout $x \in] -1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{1+\frac{1-x}{1+x}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1}{1+x} \times \frac{1+x}{1+x+1-x} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

On reconnaît $\frac{1}{2} \arccos'(x)$!

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in] -1, 1]$, $f(x) = \frac{1}{2} \arccos(x) + C$

Or $f(0) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ d'une part,

et $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, donc on a $f(0) = \frac{\pi}{4} + C$ d'autre part.

On en déduit que $C = 0$ et donc que

$$f : x \mapsto \frac{1}{2} \arccos(x)$$