Exercices

Exercice 1. Déterminer la nature des séries :

1. $\sum \frac{n}{n^2+1}$;
2. $\sum \frac{\ln n}{n}$;
3. $\sum \frac{\ln n}{n^2}$;
4. $\sum \frac{1}{\operatorname{ch} n}$;
5. $\sum \frac{1}{\operatorname{Arctan} n}$;
6. $\sum \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$;
7. $\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$;
8. $\sum e^{-\sqrt{n}}$;
9. $\sum e^{-\sqrt{n}+\sin n}$;
10. $\sum n^3 e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 2. Étudier la nature des séries :
1. $\sum \sin n$;
2. $\sum n^{-1-\frac{1}{n}}$;
3. $\sum \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}\right)$.

Exercice 3. Étudier la nature de la série
$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}.$$

Exercice 4. Intégrales de Wallis On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t.$$
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = J_n$.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
   Indication : utiliser une intégration par parties.
4. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On écrira les expressions obtenues au moyen de factorielles.
5. Montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} I_{n+1}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$.
6. En déduire un équivalent de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Étudier la convergence de la série $\sum I_n$.

Exercice 5. On considère la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n$.

1. Montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $K > 0$.
3. On utilise ici les résultats de l'exercice précédent sur les intégrales de Wallis $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en particulier :
$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \times \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$
   Déterminer la valeur de K.
4. Conclure par la formule de Stirling :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 6. Constante d'Euler et développement asymptotique de la série harmonique.
1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}.$$
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n).$$
3. En déduire un équivalent de $H_n = \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
4. Montrer que la série $\sum \left(\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ converge et donner un équivalent des restes.
   On note γ sa somme : on l'appelle la constante d'Euler.
5. Montrer que la suite u définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k}) - \ln(n+1)$ converge et préciser sa limite.
6. Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}}$ où le terme a apparaît n fois.
Montrer que la suite u converge et préciser sa limite.

Exercice 8. Théorème du point fixe de Picard
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $f : E \longrightarrow E$ une application k-lipschitzienne avec $k \in]0\,;1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
   Indication : On pourra étudier la série télescopique associée.
2. Montrer que f a un unique point fixe.

Exercice 9. Règle de Duhamel
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$, et diverge si $\alpha < 1$.
   Indication : on pourra introduire $v_n = n^{\beta} u_n$ pour un β bien choisi.
2. Déterminer la nature de la série : $\sum \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3^n n!}$.

Exercice 10. Règle d'Abel.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques. On suppose :

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle positive, décroissante et converge vers 0 ;
- la série $\sum v_n$ est bornée : la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est bornée.

1. Montrer que la série $\sum (u_n - u_{n+1})V_n$ est convergente.
2. En déduire que la série $\sum u_n v_n$ est convergente.
3. Application : montrer que les séries $\sum \frac{\sin n}{n}$ et $\sum \frac{\cos n}{n}$ sont convergentes.
   Sont-elles absolument convergentes ?
   indication : $|\sin n| \geqslant \sin^2(n)$.
4. Cette règle s'applique-t-elle si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé ?

Exercice 11. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison $r > 0$ et de premier terme $a_0 > 0$.
Soit u la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{(a_{2n})^4} \sum\limits_{k=2}^{2n} a_{k-1} a_k a_{k+1}$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et exprimer sa limite en fonction de r.

Exercice 12. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définie conjointement par : $a_0 = a, b_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n}{{a_n}^2 + {b_n}^2} \\ b_{n+1} = \frac{b_n}{{a_n}^2 + {b_n}^2} \end{cases}$$

Étudier la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Indication : on pourra poser $z_n = a_n + i b_n$.

Exercice 13. Déterminer la nature de la série $\sum \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^{\alpha}}$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$).

Exercice 14. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{n^2}\right)$ converge et déterminer sa somme.
Indication : on pourra montrer que $\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{n^2}\right) = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n-1)$.

Exercice 15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que la série $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{2n} u_k = 0$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = 0$.
3. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
4. Réciproquement, si $\lim_{n\to+\infty} n u_n = 0$, peut-on affirmer que $\sum u_n$ converge ?

Banque CCINP

Exercice 16 (CCINP 5).

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas $\boldsymbol{\alpha \leqslant 0}$**

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas $\boldsymbol{\alpha > 0}$**

   Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice 17 (CCINP 40).
Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $||\ ||$.
On suppose que : $\forall (u,v) \in A^2,\ ||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.

   (b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ converge.

Exercice 18 (CCINP 46).
On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice 19 (CCINP 54).
Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ ||u|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

   (a) Prouver que $||\,.\,||$ est une norme sur E.

   (b) Prouver que : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ \sum \dfrac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

   (c) On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E,\ f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

   Prouver que f est continue sur E.