démonstration de l'équivalence des normes en dimension finie

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et N une norme sur E.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, l'isomorphisme associé :

$$\begin{array}{rccl} \varphi & : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & & x & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x). \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \| \, \|_{\mathcal{B}} & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \|\varphi(x)\|_\infty = \max\limits_{i \in [\![1\,;n]\!]} |x_i| \,; \text{avec } (x_1, \ldots, x_n) \text{ coordonnées de } x \text{ dans } \mathcal{B}, \end{array}$$

il s'agit bien d'une norme sur E (à faire : se déduit facilement du fait que $\| \, \|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$ et φ est un isomorphisme).
Montrons que N et $\| \, \|_{\mathcal{B}}$ sont des normes équivalentes :

- Pour $x = \sum\limits_{i=1}^n x_i e_i \in E$, d'après l'inégalité triangulaire pour la norme N,

$$\begin{aligned} N(x) &\leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \, N(e_i) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \|x\|_{\mathcal{B}} \, N(e_i) && (|x_i| \leqslant \|x\|_{\mathcal{B}} \text{ et } N(e_i) \geqslant 0) \\ &\leqslant \|x\|_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^n N(e_i) \\ &\leqslant \beta \, \|x\|_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

  avec $\beta = \sum\limits_{i=1}^n N(e_i)$ qui ne dépend pas de x.
  Donc : $\forall x \in E, N(x) \leqslant \beta \, \|x\|_{\mathcal{B}}$.
- $\forall x \in E, \|\varphi(x)\|_\infty = \|x\|_{\mathcal{B}} \leqslant 1 \cdot \|x\|_{\mathcal{B}}$, donc φ est une application linéaire continue de $(E, \| \, \|_{\mathcal{B}})$ dans $(\mathbb{K}^n, \| \, \|_\infty)$; et de même $\psi = \varphi^{-1}$ est linéaire continue de $(\mathbb{K}^n, \| \, \|_\infty)$ dans $(E, \| \, \|_{\mathcal{B}})$.
  Or la sphère $S = S^{\| \, \|_{\mathcal{B}}}(0_E, 1)$ de $(E, \| \, \|_{\mathcal{B}})$ est l'image directe par l'application continue ψ de la sphère unité de $(\mathbb{K}^n, \| \, \|_\infty)$ qui est compact. Donc : la sphère S est un compact de $(E, \| \, \|_{\mathcal{B}})$.
  Et : $\forall x, y \in E, |N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y) \leqslant \beta \, \|x - y\|_{\mathcal{B}}$, donc N est β-lipschitzienne de $(E, \| \, \|_{\mathcal{B}})$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$ donc continue de $(E, \| \, \|_{\mathcal{B}})$ dans $(\mathbb{R}, | \, |)$. Or $S = S^{\| \, \|_{\mathcal{B}}}(0_E, 1)$ est un compact de $(E, \| \, \|_{\mathcal{B}})$ donc, d'après le théorème des bornes atteintes, N a un minimum δ sur S. Il existe donc $x_0 \in S$ tel que $N(x_0) = \delta$, en particulier $x_0 \neq 0_E$ (car $\|x\|_{\mathcal{B}} = 1$), donc $\delta = N(x_0) > 0$.
  D'où : $\forall x \in E \setminus \{0\}, \delta \leqslant N\left(\frac{x}{\|x\|_{\mathcal{B}}}\right)$.
  Et : $\forall x \in E \setminus \{0\}, \delta \, \|x\|_{\mathcal{B}} \leqslant N(x)$, également vrai pour $x = 0_E$.

On a montré que :

$$\forall x \in E, \begin{cases} N(x) \leqslant \beta \, \|x\|_{\mathcal{B}} \\ \|x\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{1}{\delta} N(x) \end{cases}$$

donc N et $\| \, \|_{\mathcal{B}}$ sont équivalentes.
Ainsi toute norme sur E est équivalente à la norme $\| \, \|_{\mathcal{B}}$ et par transitivité, toutes les normes sur E sont équivalentes.