TD n° 9.
Ensembles, applications.

Applications directes du cours

Exercice 1 On définit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrez que f est bijective et déterminez son application réciproque.

Exercice 2 Remplacez les phrases suivantes par des phrases du type : “l’application de ... vers...qui à tout...fait correspondre... est (ou n’est pas) injective (ou surjective ou bijective).

Exemple : “deux cercles distincts peuvent avoir même centre” devient “l’application de *l’ensemble des cercles* vers *le plan* qui à tout *cercle* fait correspondre *son centre* n’est pas *injective*”

1. Dans cette classe, il y a des élèves qui ont le même âge.
2. Dans cette classe, chaque élève est né un jour différent de l’année.
3. Il y a des réels qui n’ont pas de racine carrée.
4. Tout réel positif ou nul possède une unique racine carrée positive ou nulle.
5. Toute ville de France possède au moins une église.
6. Il y a des villes qui ont plusieurs églises.
7. On peut avoir $a+b=c+d$ sans que $a=c$ et $b=d$.

Exercice 3 Soient $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par

$$f(x) = x+1 \quad \text{et} \quad g(y) = y-1 \text{ si } y > 0,$$

et $g(0)=0$. Étudiez l’éventuelle injectivité, surjectivité et bijectivité de f et g. Précisez $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 4 Que dire de deux ensembles A et B tels que $A \cap B = A \cup B$?

Applications directes du cours*

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = -2x^2 + x.$$

Est-elle injective ou surjective ? Déterminez les ensembles $f([\frac{1}{2}; 2])$ et $f^{-1}([-1; 0])$.

Exercice 6 Soient E, F, G trois ensembles, et $f : E \longrightarrow F$, $g : E \longrightarrow G$ deux applications. Soit

$$h : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \times G \\ x & \longmapsto & \big((f(x), g(x)\big) \end{array}$$

1. Montrez que si f ou g est injective, alors h l'est.
2. On suppose f et g surjectives. Que peut-on dire de h ?

Exercice 7 L'application $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall\, z \in \mathbb{C}^*,\ f(z) = z + \frac{1}{z}$$

est-elle surjective ? injective ? Déterminez $f(\mathbb{R}^*)$ et $f(\mathcal{U})$.

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z^2 + z + 1$.

1. Déterminez $f(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{C}^*)$, $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminez $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}(\mathbb{C}^*)$, $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Exercices classiques

Exercice 9

1. Soit E un ensemble. Montrez que l'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$. Est-il total ? Admet-il un minimum ? Un maximum ?
2. Montrez que la divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Est-il total ? Admet-il un minimum ? Un maximum ?

Exercice 10 Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ? Bijectives ?

1. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+1} \end{array}$
2. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}$
3. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, xy) \end{array}$
4. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$
5. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \dfrac{1}{x^2+1} \end{array}$
6. $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (p,q) & \longmapsto & p + \dfrac{1}{q} \end{array}$

Exercice 11 Soient E un ensemble et trois parties A, B et C de E. Montrez que

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{array} \right. \iff B \subset C.$$

Exercice 12 Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On considère la fonction .

1. Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $f(z) = \dfrac{z-\alpha}{z-1}$ est bien définie.

2. Soit $u \in \mathbb{C}$. Résoudre l'équation $f(z) = u$ d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Dans le cas où il y a une unique solution, on exprimera celle-ci en fonction de $f(u)$.
3. La fonction f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrez que $f \circ f(z)$ est bien défini est déterminez ce nombre complexe, sans calcul, en fonction de z. Qu'est-ce que cela signifie pour f ?

Exercice 13 Soient $P = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$. Montrez que l'application $f : P \longrightarrow D$ définie par $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ est une bijection.

Exercice 14 Soient X, Y et Z trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrez que $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$ et $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$.

Exercice 15 Soient D_1 et D_2 deux droites distinctes du plan euclidien $\mathcal{P}$. Soient p_1 et p_2 les projections orthogonales respectivement sur D_1 et D_2. Soit $f : \mathcal{P} \to D_1 \times D_2$ la fonction définie par

$$\forall\, M \in \mathcal{P},\ f(M) = (p_1(M), p_2(M))\,.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante l'application f est elle bijective ?

Exercice 16 Trouvez toutes les bijections $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n.$$

Exercice 17 Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Soient A et B deux sous-ensembles de E. On sait que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Montrer que f est injective si et seulement si $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.

Exercice 18 Étant donnés un ensemble E et trois parties A, B, C de E, montrez que

$$A \cap \overline{B} = A \cap \overline{C} \iff A \cap B = A \cap C,$$

où $\overline{X}$ désigne le complémentaire de X dans E.

Exercice 19 Déterminez les ensembles suivants :

1. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$
2. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$
3. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$
4. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$

Exercice 20 On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrez que c'est une relation d'équivalence.
2. Déterminez la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$.

Exercices classiques*

Exercice 21 Soit E un ensemble et $A \subset E$. On considère les applications $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E),\ X \mapsto A \cap X$ et $g : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E),\ X \mapsto X \cup A$.

1. Déterminer les images de $\mathcal{P}(E)$ par f et g. Sont-elles injectives, surjectives ?
2. Pour $Y \in \mathcal{P}(E)$, déterminer $f^{-1}(\{Y\})$ et $g^{-1}(\{Y\})$.

Exercice 22 Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles d'un ensemble E. On suppose que pour tout indice i de I on a $E = A_i \cup B_i$. Montrez que

$$E = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right).$$

Exercice 23 Soit $E = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$. On définit une relation binaire $\prec$ sur E par

$$z \prec z' \iff |z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(z')).$$

Montrez que $\prec$ est une relation d'ordre sur E. Cet ordre est-il total ?

Exercice 24 On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la relation binaire $\prec$ par

$$x \prec y \iff \exists\, n \in \mathbb{N},\ y = x^n.$$

Montrez que $\prec$ est une relation d'ordre. Est-il total ?

Exercice 25 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x) = \dfrac{1+ix}{1-ix}$.

1. Montrez que f est bien définie.
2. Est-elle injective ? Surjective ?
3. Déterminez $f^{-1}(\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{R})$.

Exercice 26 Montrez qu'il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ compatible avec l'addition et la multiplication, *i.e.* telle que si $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, on ait

$$a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d \Longrightarrow a + c \leqslant b + d$$
$$a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c \Longrightarrow ac \leqslant bc$$

Exercices*

Exercice 27 Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E, et $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$. Déterminez une cns sur A et B pour que f soit injective (resp. surjective).

Exercice 28 Soit E un ensemble. Montrez qu'il n'existe pas d'application surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$.