MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,
Année scolaire 2025/2026.

# DL n° 2.

**Mercredi 19 novembre.**

**Exercice 1** Soient $E, F, G, H$ des ensembles, $s : E \longrightarrow F$, $f : E \longrightarrow G$, $i : G \longrightarrow H$, $g : F \longrightarrow H$ des fonctions telles que $s$ soit surjective, $i$ soit injective, et $i \circ f = g \circ s$.

Montrez qu'il existe une unique application $h : F \longrightarrow G$ telle que $f = h \circ s \quad \text{et} \quad g = i \circ h$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, two heads, "s"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h"] \\ G \arrow[r, hook, "i"'] & H \end{tikzcd}$$

**Exercice 2 (Théorème de Cantor-Bernstein)** Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On suppose qu'il existe $f \in F^E$ et $g \in E^F$ toutes deux injectives. On veut montrer qu'il existe $h \in F^E$ bijective.

Dans toute la suite, les complémentaires sont pris dans $E$ pour les sous-ensembles de $E$, et dans $F$ pour les sous-ensembles de $F$.

On considère l'ensemble $H = \left\{ A \in \mathcal{P}(E) \mid g\left(\overline{f(A)}\right) \subset \overline{A} \right\}$.

1. Montrez que $H \neq \emptyset$.
2. Montrez que $H$ admet un plus grand élément (au sens de l'inclusion), que l'on notera $B$.
3. Dans cette question, on va montrer que $g\left(\overline{f(B)}\right) = \overline{B}$.
   (a) On suppose qu'il existe $x_0 \in \overline{B}$ tel que $x_0 \notin g\left(\overline{f(B)}\right)$. Soit $B' = B \cup \{x_0\}$. Montrez que $B' \in H$.
   (b) Conclure.
4. (a) Montrez que $f$ réalise une bijection de $B$ sur $f(B)$.
   (b) Montrez que $g$ réalise une bijection de $\overline{f(B)}$ sur $\overline{B}$.
   (c) En déduire une bijection $h$ de $E$ vers $F$.