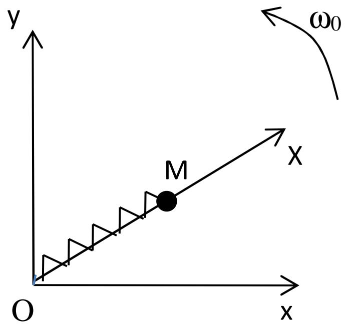
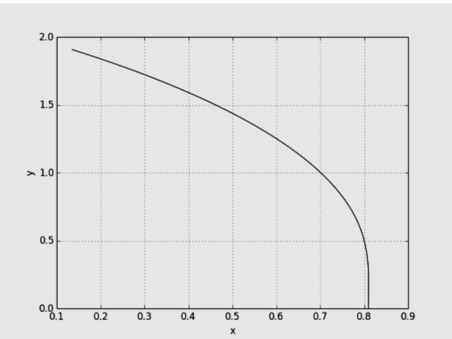
4.2.2 Dynamique référentiels en rotation-Exercice 2

Une perle M, de masse m, est fixée à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Elle peut coulisser sans frottement sur une tige qui a un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe vertical Oz, à la vitesse angulaire ω_0.

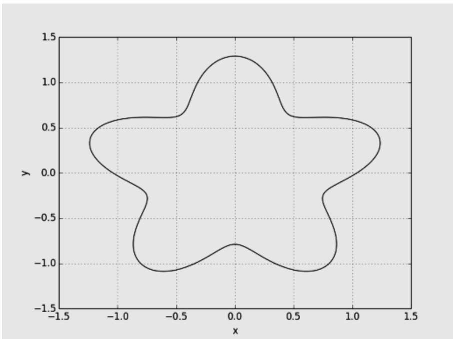


1-Etablir l'équation en X(t) du mouvement de la perle le long de la tige. On posera : $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $a = \dfrac{\omega}{\omega_0}$

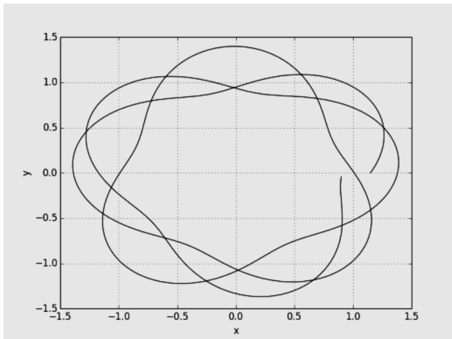
2-On a les trajectoires suivantes de la perle dans le référentiel du laboratoire :



$a = 0{,}4$



$a = \sqrt{26}$



$a = 2{,}78$

Les commenter en fonction de la valeur de a.

3-Déterminer la force exercée par la tige sur la perle.

4-Que donnerait l'action d'une force de frottement sur le mouvement de la perle ?

4.2.2 Dynamique référentiels en rotation-Exercice 2

1-Soit *R* le référentiel galiléen du laboratoire, auquel on associe le repère (Oxyz), l'axe Oz est dirigé vers le haut. On note *R'* le référentiel non galiléen lié à la tige, en rotation, par rapport à *R* à la vitesse angulaire ω_0. On associe à *R'* le repère (OXYz).

Force sur la perle dans *R'* :

- poids $-mg\vec{u}_z$
- réaction $\vec{R}$ de la tige (perpendiculaire à OX car il n'y a pas de frottement)
- force élastique $\vec{F} = -k(X - \ell_0)\vec{u}_X$
- force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\omega_0^2 X\vec{u}_X$
- force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\omega_0\vec{u}_z \wedge \dot{X}\vec{u}_X = -2m\omega_0\dot{X}\vec{u}_Y$

<u>Loi de la quantité de mouvement à M dans *R'* non galiléen</u> : $m\vec{a}_{M/R'} = -mg\vec{u}_z + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$

En projection selon OX : $m\ddot{X} = -k(X - \ell_0) + m\omega_0^2 X$

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X - \omega_0^2 X = \frac{k}{m}\ell_0$$

$$\ddot{X} + (\omega^2 - \omega_0^2)X = \omega^2\ell_0$$

Finalement : $\boxed{\ddot{X} + \omega_0^2(a^2 - 1)X = a^2\omega_0^2\ell_0}$

2-<u>Si a > 1</u> : solution du type $X(t) = A\cos\Omega t + B\sin\Omega t + \dfrac{a^2\ell_0}{a^2 - 1}$ avec $\Omega = \omega_0\sqrt{a^2 - 1}$

Oscillations sinusoïdales de pulsation Ω le long de l'axe OX, couplées avec une rotation à la vitesse angulaire ω_0 autour de Oz. On observe les trajectoires 2 et 3.

Les trajectoires sont centrées sur le rayon moyen $\dfrac{a^2\ell_0}{a^2 - 1}$

La trajectoire 2 est fermée car $\Omega = 5\omega_0$. On voit les 5 oscillations selon OX pendant 1 tour.
La trajectoire 3 se décale à chaque tour car Ω et ω_0 ne sont pas dans un rapport entier.

<u>Si a < 1</u> : solution du type $X(t) = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t} + \dfrac{a^2\ell_0}{a^2 - 1}$ avec $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - a^2}$

On observe la trajectoire 1 : X augmente au cours du temps lors de la rotation de la tige.
Le ressort va se casser et la perle être éjectée de la tige.

3- $m\vec{a}_{M/R'} = -mg\vec{u}_z + \vec{R} + \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$ donne : $\boxed{\vec{R} = mg\vec{u}_z + 2m\omega_0\dot{X}\vec{u}_Y}$

4-Pour a > 1, il y a un <u>amortissement</u> du mouvement et la trajectoire dans le référentiel du laboratoire tend vers le cercle de rayon $\dfrac{a^2\ell_0}{a^2 - 1}$.