

# Chapitre 15

## Calcul matriciel sans applications linéaires

Dans ce chapitre, nous allons apprendre à manipuler les matrices. La théorie des matrices en relation avec l'algèbre linéaire sera faite plus tard.

On utilisera le symbole de Kronecker défini par

$$\forall i, j \in \mathbb{R}, \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### 1 Définitions

Dans ce paragraphe,  $K$  est un corps (généralement  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ), et  $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ .

#### 1.1 Définitions

##### Définition 1.1 (Matrice)

- Une matrice  $A$  à coefficients dans  $K$  à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est une fonction

$$\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\} \longrightarrow K.$$

Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $j \in \{1, \dots, p\}$ , on note  $a_{ij} = A(i, j)$ , aussi appelé élément à la  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne, et on note

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \cdots & a_{ij} & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

$n \times p$  est la taille de la matrice.

- On note  $\mathcal{M}_{n,p}(K)$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $K$ .

##### Exemple.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -6 & -7 & \pi \end{pmatrix}$  est une matrice 2 lignes et 3 colonnes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  : c'est un élément de  $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ . Et par exemple  $a_{13} = 4$ .

**Définition 1.2 (Matrices carrées)**

1. Une *matrice carrée d'ordre n* est une matrice à  $n$  lignes et  $n$  colonnes.
2. On note  $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{n,n}(K)$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$ .
3. Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ . Les éléments  $(a_{11}, \dots, a_{nn})$  forment la *diagonale* de  $A$ .

**Exemple.**

$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 7/4 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$  est une matrice carrée de taille 3. C'est un élément de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Sa diagonale est  $(4, 2, 3)$ .

**Définition 1.3 (Matrice diagonale)**

Une matrice diagonale d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$  est une matrice carrée dont les coefficients en dehors de la diagonale sont tous nuls.

**Exemple.**

$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  est une matrice diagonale de taille 3.

**Définition 1.4 (Matrice nulle, matrice unité)**

1. La matrice unité d'ordre  $n$   $I_n \in \mathcal{M}_n(K)$  est la matrice diagonale dont les éléments de la diagonale valent tous 1.
2. La matrice nulle à  $n$  lignes et  $p$  colonnes est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

**Remarques.**

1. Il y a bien sûr une infinité de matrices identités et de matrices nulles.
2. Une matrice unité est carré. Mais une matrice nulle pas nécessairement.

**Exemples.**

1.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est la matrice unité de taille 4.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  est celle de taille 3.
2.  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est la matrice nulle de taille  $3 \times 4$ .

**Définition 1.5 (Matrices triangulaires)**

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ .

1. Elle est *triangulaire supérieure* si  $a_{ij} = 0$  pour  $i > j$ .
2. Elle est *triangulaire inférieure* si  $a_{ij} = 0$  pour  $j > i$ .

**Remarques.**

1. Une matrice diagonale est à la fois triangulaire supérieure et inférieure.
2. Une matrice triangulaire est carré.

**Exemple.**

$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  est triangulaire supérieure, et  $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & 2/3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  est triangulaire inférieure.

**Définition 1.6 (Matrices lignes, matrices colonnes)**

1. Une matrice ligne est une matrice à 1 ligne et  $p$  colonnes.
2. Une matrice colonne est une matrice à  $n$  lignes et 1 colonne.

**Exemple.**

$(4 \ 5 \ -6 \ 3)$  est une matrice ligne, et  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$  est une matrice colonne.

**Remarque.**

Attention :  $(4 \ 5 \ -6 \ 3) \neq (4, 5, -6, 3)$ .

## 1.2 Transposée, matrices symétriques et antisymétriques

**Définition 1.7 (Transposée)**

La *transposée* d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  est la matrice  $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$  définie par  $A^T = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ , où pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $b_{ij} = a_{ji}$ , i.e. les lignes de  $A^T$  sont les colonnes de  $A$ , et les colonnes de  $A^T$  sont les lignes de  $A$ .

**Remarque.**

On a donc

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \cdots & a_{ji} & \\ a_{1p} & a_{2p} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

**Exemple.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 7/4 & 9 \\ -5 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ , et  $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & -2 \\ -1 & 7/4 & 3 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ .

### Proposition 1.8

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ . Alors  $(A^T)^T = A$ .

### Définition 1.9 (Matrices symétriques et antisymétriques)

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  est *symétrique* si  $A^T = A$ , et *antisymétrique* si  $A^T = -A$ .

#### Remarque.

On note  $\mathcal{S}_n(K)$  (resp.  $\mathcal{A}_n(K)$ ) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de taille  $n$ , à coefficients dans  $K$ .

#### Exemple.

$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & -6 & 2/3 \\ 5 & 2/3 & 8 \end{pmatrix}$  est symétrique, et  $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & -2/3 \\ -5 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$  est antisymétrique.

#### Remarques.

1. Autrement dit, une matrice est symétrique si les lignes sont les mêmes que les colonnes, et antisymétriques si les lignes sont les opposées des colonnes.
2. Attention : les matrices symétriques et antisymétriques sont carrées.

### Proposition 1.10

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ .

1.  $A$  est symétrique si et seulement si, pour tous  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{ij} = a_{ji}$ .
2.  $A$  est antisymétrique si et seulement si, pour tous  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{ij} = -a_{ji}$ .

### Proposition 1.11

Soit  $A$  une matrice antisymétrique. Alors tous les éléments de sa diagonale sont nuls.

## 1.3 Addition des matrices

### Définition 1.12 (Addition)

On munit  $\mathcal{M}_{n,p}(K)$  d'une addition définie, pour  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ ,  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}.$$

#### Remarque.

Ce sont donc des opérations coefficient par coefficient, similaires à celles dans  $\mathbb{R}^{np}$ .

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 7/4 & 9 \\ -5 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -33 & 2 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 5 & 12 & 13 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -30 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 11/4 & 5 \\ 0 & 10 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

**Proposition 1.13**

L'addition définie dans la définition 1.12 munit  $\mathcal{M}_{n,p}(K)$  d'une structure de groupe commutatif.

**Proposition 1.14 (Transposée d'une somme)**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  et  $\lambda \in K$ . Alors  $(A + B)^T = A^T + B^T$ .

**Remarque.**

Autrement dit, l'application  $\mathcal{M}_{n,p}(K) \rightarrow \mathcal{M}_{p,n}(K)$  qui à  $A$  associe  $A^T$  est un morphisme de groupes.

## 1.4 Produit matriciel et structure d'anneau

**Définition 1.15 (Produit de matrices)**

Soient  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  et  $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ . Le produit  $AB$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{n,q}(K)$  dont le coefficient  $(i, j)$  ( $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ) est

$$\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj},$$

**Remarques.**

1. Le produit  $AB$  n'existe que si le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ .
2. Un cas particulier intéressant est celui des matrices carrées ( $n = p = q$ ), qui fournit un produit

$$\mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K).$$

3. Il faut voir le produit de la façon suivante : le coefficient à la ligne  $i$ , colonne  $j$  est obtenue en faisant le "produit scalaire" de la ligne  $i$  de  $A$  avec la colonne  $j$  de  $B$ .

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \text{ car par exemple, le coefficient (1, 2) est}$$

$$2 \times (-2) + 3 \times 1 + (-5) \times (-2) + 1 \times 1 = 10,$$

et le coefficient (2, 3) est

$$0 \times 1 + 2 \times 0 + 1 \times 1 + 3 \times 3 = 10.$$

**Proposition 1.16**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ . Alors  $AI_p = I_n A = A$ .

**Remarque.**

Il faut faire le calcul aussi visuellement. Écrivez la matrice  $A$  formellement, en faisant apparaître ses lignes, puis à côté la matrice  $I_p$  à sa droite. Faites le produit, et regardez pourquoi on obtient  $A$ .

**Proposition 1.17 (Distributivité)**

Soient  $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$ , et  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ ,  $B, C \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ ,  $D \in \mathcal{M}_{q,r}(K)$ . Alors

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{et} \quad (B + C)D = BD + CD.$$

**Proposition 1.18 (Associativité)**

Soient  $n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$ , et  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ ,  $D \in \mathcal{M}_{q,r}(K)$ . Alors

$$(AB)D = A(BD).$$

**Proposition 1.19 (Structure d'anneau)**

L'ensemble  $(\mathcal{M}_n(K), +, \times)$  est un anneau (non commutatif si  $n \geq 2$ ), dont l'élément neutre pour la multiplication est la matrice unité  $I_n$ .

**Remarque.**

On a bien sûr  $A^i A^j = A^j A^i = A^{i+j}$ .

**Proposition 1.20**

Soient  $n, p \in \mathbb{N}$  et  $A, B \in \mathcal{M}_p(K)$  telles que  $AB = BA$ . Alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k},$$

où par convention  $M^0 = I_p$  pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_p(K)$ .

**Méthode 1.21**

On peut en particulier utiliser cette proposition avec  $B = I_p$  ou  $B = -I_p$ , et si  $A$  est inversible, avec  $B = A^{-1}$  et  $B = -A^{-1}$ .

**Remarque.**

Attention, la formule est fausse si les matrices  $A$  et  $B$  ne commutent pas. Par exemple, en général,

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$

Vous pouvez essayer avec  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Proposition 1.22 (Transposé d'un produit)**

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,r}$ . Alors  $(AB)^T = B^T A^T$ .

**Proposition 1.23 (Produit de matrices diagonales et triangulaires)**

Soient  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}, B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ .

1. Si  $A$  et  $B$  sont diagonales, alors  $AB$  est diagonale, et sa diagonale est  $(a_{11}b_{11}, \dots, a_{nn}b_{nn})$ .
2. Si  $A$  et  $B$  sont triangulaires supérieures (resp. inférieures), alors  $AB$  est triangulaire supérieure (resp. inférieure), et sa diagonale est  $(a_{11}b_{11}, \dots, a_{nn}b_{nn})$ .

**Corollaire 1.24**

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ , et  $p \in \mathbb{N}$ .

1. Si  $A$  est diagonale, alors  $A^p$  est diagonale, et sa diagonale est  $(a_{11}^p, \dots, a_{nn}^p)$ .
2. Si  $A$  est triangulaire supérieure (resp. inférieure), alors  $A^p$  est triangulaire supérieure (resp. inférieure), et sa diagonale est  $(a_{11}^p, \dots, a_{nn}^p)$ .

## 1.5 Trace

**Définition 1.25 (Trace)**

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ . La trace de  $A$  est la somme des éléments de la diagonale de  $A$ , i.e.

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$
**Remarque.**

La trace n'existe que pour une matrice carrée.

**Proposition 1.26**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ , et  $\lambda, \mu \in K$ . Alors  $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$ .

**Proposition 1.27**

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ . Alors  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

**Remarque.**

Attention :  $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A) \text{tr}(B)$ .

## 2 Matrices inversibles

### 2.1 Définition et propriétés

#### Définition 2.1

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  est *inversible* s'il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(K)$  tel que  $AB = BA = I_n$ .

#### Remarques.

1. Autrement dit,  $A$  est inversible si elle est un élément inversible dans l'anneau  $\mathcal{M}_n(K)$ . La matrice  $B$  est alors son inverse et on note  $B = A^{-1}$ .
2. On note  $GL_n(K)$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  inversibles ( $GL$  signifie "groupe linéaire").

#### Méthode 2.2 (Simplification par une matrice inversible)

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in GL_n(K)$ ,  $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ , et  $D \in GL_p(K)$ .

1. Si  $AB = C$ , alors  $B = A^{-1}C$ , et si  $BD = C$ , alors  $B = CD^{-1}$ .
2. Si  $AB = 0$ , alors  $B = 0$ , et si  $BD = 0$ , alors  $B = 0$ .
3. Si  $AB = AC$ , alors  $B = C$ , et si  $BD = CD$ , alors  $B = C$ .

#### Remarques.

1. Ce sont en fait des équivalences.
2. On a simplement redémontré qu'un élément inversible (ici  $A$ ) dans un anneau (ici  $\mathcal{M}_n(K)$ ) est un élément régulier, donc on peut simplifier par un tel élément.
3. Attention : c'est faux si  $A$  n'est pas inversible. Par exemple, avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on a  $AB = 0$ , mais  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$ .

#### Proposition 2.3

Soient  $a, b, c, d \in K$ . Alors  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est inversible si et seulement si  $ad - bc \neq 0$ , et si c'est le cas, son inverse est la matrice  $\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .

#### Exemples.

1. L'inverse de la matrice  $I_n$  est  $I_n$  car  $I_n I_n = I_n$ .
2. L'inverse de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  est la matrice  $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ . On le vérifie en faisant les deux produits.

3. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$  n'est pas inversible.

**Remarque.**

On verra plus tard comment déterminer si une matrice de taille  $\geq 3$  est inversible, et comment déterminer son inverse.

**Proposition 2.4**

Soit  $A \in GL_n(K)$ .

1. On a  $A^{-1} \in GL_n(K)$  et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .
2. On a  $A^T \in GL_n(K)$  et  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ .

**Proposition 2.5**

L'ensemble  $GL_n(K)$  est un groupe pour la multiplication des matrices.

**Définition 2.6**

Soit  $A \in GL_n(K)$  et  $i \in \mathbb{N}$ . On définit  $A^{-i}$  par :  $A^{-i} = (A^i)^{-1}$ .

**Proposition 2.7**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$  telles que  $AB = I_n$ . Alors  $A$  et  $B$  sont inversibles et  $A^{-1} = B$ .

**Définition 2.8**

Deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$  sont semblables s'il existe  $P \in GL_n(K)$  tel que  $B = P^{-1}AP$ .

**Remarque.**

C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des matrices carrées.

**Proposition 2.9**

Deux matrices semblables ont même trace.

## 2.2 Inversion d'une matrice par résolution d'un système linéaire

**Définition 2.10**

1. Un *système linéaire à  $n$  équations et  $p$  inconnues* est un système du type

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array} \right.$$

où

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(K), \quad b_1, \dots, b_n \in K$$

et les inconnues sont  $x_1, \dots, x_p \in K$ . Un tel système est équivalent à l'équation  $AX = B$ , où  $B$  est une matrice colonne  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ , et l'inconnue est  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(K)$ . La matrice  $A$  est la *matrice du système*, et  $B$  est le second membre.

2. Le système est *compatible* s'il admet au moins une solution.
3. Si  $B = 0$ , le système est homogène.
4. Le *système homogène associé* au système est le système obtenu en remplaçant  $B$  par la colonne nulle.

### Proposition 2.11

Avec les notations précédentes, la matrice  $AX$  est une matrice colonne, combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .

### Proposition 2.12

Avec les notations précédentes, le système  $AX = B$  est compatible si et seulement si  $B$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .

### Proposition 2.13

Avec les notations précédentes, les solutions du système  $AX = B$  sont les colonnes  $X_0 + Y$ , où  $X_0$  est une solution particulière du système, et où  $Y$  parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.

### Proposition 2.14

Avec les notations précédentes, si  $n = p$ , le système admet une unique solution si et seulement si la matrice  $A$  est inversible.

### Méthode 2.15

Pour déterminer si une matrice carrée  $A$  est inversible, et le cas échéant calculer son inverse, on résout  $AX = Y$ , où  $X$  et  $Y$  sont des matrices colonnes (avec autant de lignes que  $A$ ). La matrice  $A$  est inversible si et seulement si ce système admet une unique solution pour tout  $Y$ , et alors on obtient  $A^{-1}$  en écrivant que

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = b_{11}y_1 + \cdots + b_{1n}y_n \\ \vdots = \vdots + \cdots + \vdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + \cdots + b_{nn}y_n \end{array} \right.,$$

on lit

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

### Exemples.

1. Inversez la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . On obtient  $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .
2. Inversez la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . On obtient  $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -8 & -16 & -14 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 0 \\ -10 & -17 & -19 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$
3. La matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix}$  est-elle inversible ? Si oui, déterminez son inverse.

### Proposition 2.16 (Inverse des matrices triangulaires)

1. Une matrice triangulaire  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  est inversible si et seulement si ses éléments sur la diagonale sont tous non nuls, et alors  $A^{-1}$  est triangulaire de même forme, dont les éléments sur la diagonale sont les inverses de ceux de  $A$ .
2. Une matrice diagonale  $A \in \mathcal{M}_n(K)$  est inversible si et seulement si ses éléments sur la diagonale sont tous non nuls, et alors  $A^{-1}$  est diagonale, dont les éléments sur la diagonale sont les inverses de ceux de  $A$ .

## 3 Matrices et manipulations élémentaires

### 3.1 Matrices élémentaires

#### Définition 3.1 (Matrices élémentaires)

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . On définit la matrice  $E_{ij}^{np} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  comme étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient  $(i, j)$  qui vaut 1.

#### Proposition 3.2 (Produit de matrices élémentaires)

Soient  $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $j, k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\ell \in \llbracket 1, q \rrbracket$ . Alors  $E_{ij}^{np} E_{k\ell}^{pq} = \delta_{jk} E_{i\ell}^{nq}$ .

#### Proposition 3.3 (Produit d'une matrice par une matrice élémentaire)

Soient  $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $j, k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\ell \in \llbracket 1, q \rrbracket$ .

1. Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,q}(K)$ . Alors  $E_{ij}^{np} A$  est la matrice dont la  $i^{\text{ème}}$  ligne est la ligne  $j$  de  $A$  et dont les autres lignes sont nulles.
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ . Alors  $A E_{k\ell}^{pq}$  est la matrice dont la  $\ell^{\text{ème}}$  colonne est la colonne  $k$  de  $A$  et dont les autres colonnes sont nulles.

## 3.2 Manipulations élémentaires

### Définition 3.4 (Manipulations élémentaires)

Les *manipulations élémentaires* sur une matrice sont les opérations suivantes :

1. Multiplier une ligne (ou une colonne) par un scalaire non nul.
2. Échanger deux lignes (deux colonnes).
3. Ajouter à une ligne (à une colonne)  $\lambda$  fois une autre ( $\lambda \in K$ ).

### Remarque.

On peut effectuer les manipulations élémentaires sur les matrices en multipliant à gauche ou à droite par des matrices inversibles. En conséquence, les manipulations élémentaires transforment une matrice inversible (resp non inversible) en une matrice inversible (resp. non inversible).

### Proposition 3.5 (Pivot de Gauss)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(K)$ .

1. La matrice  $A$  est inversible si et seulement si on peut transformer  $A$  en  $I_n$  à l'aide d'une succession de manipulations élémentaires **uniquement** sur les lignes (ou **uniquement** sur les colonnes).
2. Si  $A$  est inversible, en appliquant les manipulations élémentaires précédentes à la matrice  $I_n$ , on obtient l'inverse de  $A$ .

### Méthode 3.6

Voici comment on procède pour inverser avec le pivot de Gauss. On explique la méthode sur un exemple. **On procède en ne manipulant que sur les lignes.**

1. On transforme la première colonne en  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . Pour cela, on choisit sur la première colonne un élément qu'on appelle le **pivot**. On va devoir diviser par ce nombre, donc c'est un élément **non nul**, le plus simple possible (1, c'est simple.  $\sqrt{17} - \pi$  beaucoup moins). Dans l'exemple qui suit, les pivots sont encadrés.

2. On échange la première ligne et la ligne du pivot. Cela met le pivot en première ligne.
3. On divise la première ligne par le pivot. Ainsi, on obtient 1 sur la ligne 1, colonne 1.
4. Par des manipulations élémentaires à l'aide de la ligne 1, on transforme la colonne 1 comme voulu, voir l'exemple.
5. À partir de ce moment-là, **on ne touche plus à la première colonne, et on n'échange plus la première ligne avec une autre.**

6. Ensuite, on transforme la deuxième colonne en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . Pour cela, on choisit sur la deuxième colonne, et **à partir de la ligne 2**, un élément qu'on appelle le **pivot**. On va devoir diviser par ce nombre, donc c'est un élément **non nul**, le plus simple possible.
7. On échange la deuxième ligne et la ligne du pivot. Cela met le pivot en deuxième ligne.
8. Par des manipulations élémentaires à l'aide de la ligne 2, on transforme la colonne 2 comme voulu, voir l'exemple.
9. À partir de ce moment-là, **on ne touche plus ni à la première colonne, ni à la deuxième, et on n'échange plus, ni la première ligne, ni la deuxième avec une autre**.
10. On transforme la troisième colonne etc...

Inversons la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \downarrow & & & \downarrow & & \\ \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \downarrow & & & \downarrow & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \downarrow & & & \downarrow & & \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \downarrow & & & \downarrow & & \\ 1 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -1 & 0 & 1 \\ \downarrow & & & \downarrow & & \\ 1 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 & 0 & -1/2 \\ \downarrow & & & \downarrow & & \\ 1 & 0 & 0 & -1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & -2/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array} \right|$$

$L_1 \leftrightarrow L_2$   
 $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$   
 $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$   
 $L_2 \leftarrow L_2/3$   
 $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$   
 $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$   
 $L_3 \leftarrow L_3/(-2)$   
 $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$   
 $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$

Ceci prouve que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & 1/2 \\ -1/6 & -2/3 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$

### Exemple.

Inversez la matrice suivante :  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  On obtient  $\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 9 & -6 & -3 & 0 \\ -7 & 3 & 4 & 5 \\ 19 & -6 & -13 & -5 \\ 4 & 9 & 2 & -5 \end{pmatrix}$