DM5 - Fonctions usuelles - Matrices

2025-2026

Exercice 1 : issu du DS de l'an dernier : mélange de trigo "normale" et hyperbolique

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right)$$

1. Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.
2. Déterminez l'ensemble de définition de f.
3. Etudiez la parité de f.
4. Justifiez que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition et calculez f'.
5. Donner le tableau de variation de f, en le complétant par ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
6. Calculez f'' (il est conseillé de simplifier le plus possible f' avant de dériver.) et précisez le signe de $f''(x)$ en fonction de x.
7. Tracez la courbe représentative de f.

1. Le plus rapide est d'exploiter les identités remarquables :

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = (\operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x))(\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)) = e^x e^{-x} = 1$$

2. La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, le seul problème est le quotient. Or $\operatorname{sh}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
3. On va utiliser l'imparité de sh, puis de arctan. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(-x) = \arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(-x)}\right) = \arctan\left(\frac{1}{-\operatorname{sh}(x)}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{\operatorname{sh}(x)}\right)$$

Ainsi, $f(-x) = -f(x)$ et f est impaire.

4. Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x)} \frac{1}{1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}} \\ &= -\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}^2(x) + 1} \\ &= -\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}}$.

5. Le calcul de limite ne pose pas de difficulté si on connait bien arctan et sh : comme $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sh}(x) = 0^+$, on en déduit que $\lim_{\to 0^+} \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} = +\infty$ et donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

De même en 0^- on obtient

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont nulles

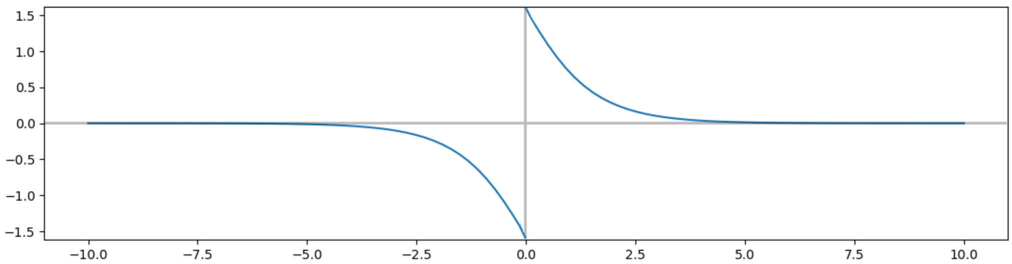
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$, on en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$ ‖ $\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

6. Si on a écrit la dérivée comme dans ce corrigé, on a facilement $f''(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)}$

Ainsi $f''(x)$ est du signe de $\operatorname{sh}(x)$, on a $f''(x) \geq 0$ pour $x \in]0, +\infty[$ (donc f y est convexe) et $f''(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty, 0[$, (donc f y est concave).

7. Voici un tracé sous Python. Sur la copie, il faut insister sur les asymptotes horizontales et l'imparité doit être visible.



Bonus : on peut se demander comment la courbe arrive en $\frac{\pi}{2}$: une idée est de regarder la dérivée : comme $\text{ch}(x) \to 1$ quand $x \to 0$, on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -1$: ça ne veut pas dire que la fonction est dérivable en 0 avec dérivée -1 (f n'est même pas définie en 0 !), mais ça indique que la pente de la fonction s'approche de -1 : tout se passe comme si on avait une tangente parallèle à la droite d'équation $y = -x$, ou plutôt deux demi tangente.

On précisera un peu plus cette histoire au second semestre, avec l'aide d'un théorème appelé "theorème des accroissements finis". En considérant des prolongements par continuité à droite et à gauche de f, on peut montrer, via ce "TAF" et le calcul de la limite de f', que ces prolongements sont dérivables à droite et à gauche respectivement. On peut alors déduire des demi-tangentes.

Exercice 2 :

Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On se propose de calculer A^n par deux méthodes différentes.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et ne sont pas classées par difficulté...

1. **Transformation en diagonale**. On pose

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Vérifier que $P^3 - 5P^2 + 8P - I_3 = O_3$. En déduire que P est inversible et calculez P^{-1}

   b) Calculez $D = PAP^{-1}$ et précisez D^n.

   c) Montrez que $A^n = P^{-1}D^nP$ et calculez A^n.

2. **Utilisation du Binôme de Newton.** Soit $B = A - I_3$.

   a) Calculer B, puis B^2.

   b) Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ que $B^k = 2^{k-1}B$.

   c) Justifiez que $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

   d) En justifiant son utilisation, appliquer le binôme de Newton à $(B + I_3)^n$ pour montrer que $A^n = \frac{1}{2}(3^n - 1)A + \frac{1}{2}(3 - 3^n)I_3$

1. a) Comme $P^3 - 5P^2 + 8P - I_3 = \mathcal{O}_3$, on a $P(P^2 - 5P + 8I_3) = I_3$ avec P matrice carré. Donc P est inversible avec $P^{-1} = P^2 - 5P + 8I_3$, c'est à dire

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -6 & 1 & 7 \end{pmatrix}}$$

   b) On calcule et on trouve $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Cette matrice est diagonale, donc $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}}$

   c) Montrons par récurrence que la proposition $\mathcal{P}_n$: $A^n = P^{-1}D^nP$ est vraie pour tout $n \geq 0$.
   Initialisation :
   Pour $n = 0$, on a $P^{-1}D^0P = PP^{-1} = I_3 = A^0$, donc l'initialisation est validée.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, donc que $A^n = P^{-1}D^nP$.
   Alors $A^{n+1} = AA^n = AP^{-1}D^nP$.

   Or $D = PAP^{-1}$, donc $P^{-1}DP = P^{-1}PAP^{-1}P = A$, et ainsi

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= P^{-1}DPP^{-1}D^nP \\
&= P^{-1}DD^nP \\
&= P^{-1}D^{n+1}P
\end{aligned}
$$

ce qui achève l'hérédité

On a donc bien pour tout $\boxed{n \in \mathbb{N},\ A^n = P^{-1}D^nP.}$

On calcule finalement et on trouve $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 3(1-3^n) & -3^n+1 & 1 \end{pmatrix}$

2. a) On observe que $B^2 = 2B$.

Par récurrence on montre facilement que $\boxed{B^k = 2^{k-1}B}$ pour tout $k \geq 1$:
pour $k = 1$, on a bien $B^1 = 2^0B$
Soit $k \geq 1$. Supposons que $B^k = 2^{k-1}B$, alors $B^{k+1} = B^kB = 2^{k-1}B^2 = 2^{k-1}2B = 2^kB$
La propriété est bien héréditaire et le principe de récurrence permet donc de conclure que la formule est vraie pour tout $k \geq 1$.

b) C'est presque un binôme de Newton ! On transforme et on a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} - \binom{n}{0} 2^0\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((2+1)^n - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}(3^n - 1)
\end{aligned}
$$

c) Comme $BI_3 = B = I_3B$ on peut appliquer le binôme de Newton et on a

$$
\begin{aligned}
A^n = (B + I_3)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B^k + \binom{n}{0} B^0 \\
&= B \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} + I_3 = B\frac{1}{2}(3^n - 1) + I_3 \\
&= A\frac{1}{2}(3^n - 1) - I_3\frac{1}{2}(3^n - 1) + I_3 \\
&= \frac{1}{2}(3^n - 1)A + \frac{1}{2}(3 - 3^n)I_3
\end{aligned}
$$

on pourrait alors en calculant explicitement cette expression et après quelques simplifications montrer qu'on tombe bien sur la même formule que dans la première partie.