

Devoir Surveillé n° 3.

le 7 novembre.

Exercice

Soit A une partie non vide d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E .

Q1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A , en termes de voisinages ou de boules.

Q2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

Q3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E , alors \bar{A} est un sous-espace vectoriel de E .

Q4. Soient B une autre partie non vide de E . Montrer que $\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}$.

Problème

Dans ce problème, E est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

Partie I

Q5. Un exemple

Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Démontrer que les matrices $\Pi_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices de projecteurs puis calculer $\Pi_1 + 5\Pi_2$, $\Pi_1 + \Pi_2$ et $\Pi_1\Pi_2$.

Q6. On rappelle le lemme de décomposition des noyaux :

si P_1, P_2, \dots, P_r sont des éléments de $\mathbb{C}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à T , si u est un endomorphisme de E , alors :

$$\text{Ker}[T(u)] = \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \text{Ker}(P_2(u)) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(P_r(u)).$$

L'objet de cette question est de démontrer le cas particulier $r = 2$.

Soit u un endomorphisme de E et soient P et Q deux polynômes premiers entre eux.

Justifier que $\text{Ker}(P(u)) \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}[(PQ)(u)]$).

Démontrer que : $\text{Ker}[(PQ)(u)] = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

Dans la suite du problème, on pourra utiliser librement le lemme de décomposition des noyaux.

Q7. Soit u un endomorphisme de E et soit π_u son polynôme minimal.

On suppose que $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ où les polynômes P_1 et P_2 sont premiers entre eux. On pose, pour tout entier $i \in \{1, 2\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$.

Justifier qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 = 1$.

Pour la suite de cette partie, on notera $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_m^{k_m}$ la décomposition en facteurs premiers du polynôme minimal et on admettra que, si pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$,

$Q_i = \frac{\pi_u}{P_i^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1 Q_1 + R_2 Q_2 + \dots + R_m Q_m = 1$.

Q8. On pose alors, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.
Démontrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers distincts de $\{1, 2, \dots, m\}$, on a les trois résultats suivants :

$$p_i \circ p_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^m p_i = id_E,$$

et chaque p_i est un projecteur de E .
Les p_i seront appelés projecteurs associés à u .

Q9. Soit u un endomorphisme de E et soit χ_u son polynôme caractéristique :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

(avec les λ_i deux à deux distincts et les α_i des entiers naturels non nuls) et, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $N_i = \text{Ker}(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ le sous-espace caractéristique associé à λ_i .
Justifier que $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_m$.

Q10. Démontrer que $E = \text{Im } p_1 \oplus \text{Im } p_2 \oplus \dots \oplus \text{Im } p_m$.

Q11. Démontrer que, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $N_i = \text{Im } p_i$.

Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que l'endomorphisme u est diagonalisable et on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ses valeurs propres distinctes.

Q12. Quel est alors le polynôme minimal π_u de u ?

Q13. On note toujours, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $Q_i = \frac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et on pose $\theta_i = \frac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.

Donner sans détails, la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{\pi_u}$, puis démontrer que les projecteurs associés à u sont, pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $p_i = \frac{Q_i(u)}{Q_i(\lambda_i)}$.

Q14. Démontrer que $X = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i Q_i(X)}{Q_i(\lambda_i)}$ puis que $u = \sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$ (décomposition spectrale de u).

Q15. Exemple : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer la matrice A^2 , en déduire le polynôme minimal π_A de la matrice A et justifier que la matrice A est diagonalisable.

b) En déduire la décomposition spectrale de la matrice A . On notera Π_1 et Π_2 les matrices des projecteurs associés.

c) Calculer, pour tout entier naturel q , A^q en fonction des matrices Π_1 et Π_2 .

Q16. On note $\mathbb{C}[v]$ l'algèbre des polynômes d'un endomorphisme v d'un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

Démontrer que la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[v]$ est égale au degré du polynôme minimal π_v de l'endomorphisme v .

Q17. On revient au cas u diagonalisable avec $\pi_u = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$.

Démontrer que la famille (p_1, p_2, \dots, p_m) des projecteurs associés à u est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$.

Q18. Dans le cas d'un endomorphisme u non diagonalisable, la famille (p_1, p_2, \dots, p_m) des projecteurs associés à u est-elle toujours une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[u]$?

Q19. Nous avons vu que si u est un endomorphisme de E diagonalisable, il existe m endomorphismes non nuls p_i de E , tels que, pour tout entier naturel q , on ait $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q p_i$.

Nous allons étudier une "réciproque".

Soit u un endomorphisme de E , \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. On suppose qu'il existe m endomorphismes non nuls f_i de E et m complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ distincts, tels que, pour tout entier naturel q , on ait $u^q = \sum_{i=1}^m \lambda_i^q f_i$.

Démontrer que u est diagonalisable.