# éléments de correction du DS 3

# PROBLEME

## Partie I

5. **Un exemple -**

$\triangleright$ La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable.

$\triangleright$ On vérifie facilement que : $\Pi_1^2 = \Pi_1$ , $\Pi_2^2 = \Pi_2$ ainsi $\Pi_1$ et $\Pi_2$ sont des matrices de projecteur.
$\Pi_1 + 5\Pi_2 = A$ , $\Pi_1 + \Pi_2 = I_2$ et $\Pi_1\Pi_2 = 0$

6. $u$ un endomorphisme de $E$ et $P$ et $Q$ deux polynômes premiers entre eux.

$\triangleright$ Soit $x \in \operatorname{Ker}(P(u))$ donc $P(u)(x) = 0$ et $(QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$ donc $[(QP)(u)](x) = Q(u)(P(u)(x)) = 0$ ce qui donne $x \in \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$ , ainsi $\operatorname{Ker}(P(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$ (de même, on a : $\operatorname{Ker}(Q(u)) \subset \operatorname{Ker}[(PQ)(u)]$ ).

$\triangleright$ On applique le théorème de Bézout : Il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$. Ce qui donne

$$\mathrm{Id}_E = (AP + BQ)(u) = A(u) \circ P(u) + B(u) \circ Q(u)$$

Donc si $x \in \ker P(u) \cap \ker Q(u)$, on a :

$$\begin{aligned} x &= (A(u) \circ P(u))(x) + (B(u) \circ Q(u))(x) \\ &= \underbrace{A(u)(P(u)(x))}_{=0} + \underbrace{B(u)(Q(u)(x))}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\ker P(u) \cap \ker Q(u) = \{0\}$.

$\triangleright$ On a $\ker(P \times Q)(u) \subset \ker P(u) + \ker Q(u)$ et si $x \in \ker(P \times Q)(u)$, alors :

$$x = \underbrace{(A(u) \circ P(u))(x)}_{\in \ker Q(u)} + \underbrace{(B(u) \circ Q(u))(x)}_{\in \ker P(u)}.$$

En effet, $Q(u)(P(u) \circ A(u)(x)) = (A(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$ et $P(u)(Q(u) \circ B(u)(x)) = (B(u) \circ (P \times Q)(u))(x) = 0$ . Donc $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}(P(u)) + \operatorname{Ker}(Q(u))$
Finalement on a montrer : $\operatorname{Ker}[(PQ)(u)] = \operatorname{Ker}(P(u)) \oplus \operatorname{Ker}(Q(u))$.

7. On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2}$ , $P_1$ et $P_2$ sont premiers entre eux,$Q_1 = P_2^{k_2}$ et $Q_2 = P_1^{k_1}$.

$Q_1$ et $Q_2$ sont premiers entre eux, le théorème de Bézout donne l'existence deux polynômes $R_1$ et $R_2$ de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 = 1$.

On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots {P_m}^{k_m}$ et pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}}$, il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \dots + R_mQ_m = 1$.

8. On a $\pi_u = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots {P_m}^{k_m}$ ,pour tout entier $i \in \{1,2,\dots,m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}}$ . $i \in \{1,2,\dots,m\}, p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$.

   $\triangleright$ Il existe des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $R_1Q_1 + R_2Q_2 + \dots + R_mQ_m = 1$ et pour tout $i \in \{1,2,\dots,m\}, p_i = R_i(u) \circ Q_i(u)$ donc

$$R_1(u) \circ Q_1(u) + \dots + R_m(u) \circ Q_m(u) = id_E$$

   par suite $\boxed{\sum_{i=1}^{m} p_i = id_E}$ .

   $\triangleright$ Soit $i, j$ des entiers distincts de $\{1,2,\dots,m\}$, on a

$$\begin{aligned} p_i \circ p_j &= R_i(u) \circ Q_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_j(u) \\ &= R_i(u) \circ R_j(u) \circ Q_i(u) \circ Q_j(u) \\ &= (R_iR_j)(u) \circ (Q_iQ_j)(u) \end{aligned}$$

   et $Q_iQ_j = \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}} \dfrac{\pi_u}{{P_j}^{k_j}} = \pi_u . \dfrac{\pi_u}{{P_i}^{k_i}{P_j}^{k_j}}$ , *car* ${P_i}^{k_i}{P_j}^{k_j}$ *divise* $\pi_u$ , par suite $\pi_u$ divise $Q_iQ_j$ , il est donc annulateur de $u$ d'où $p_i \circ p_j = 0$ .

   $\triangleright$ Soit $i$ dans $\{1,2,\dots,m\}$ , on a

$$\begin{aligned} p_i &= p_i \circ id_E \\ &= p_i \circ \sum_{j=1}^{m} p_j \\ &= p_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} p_i \circ p_j \end{aligned}$$

   or si $i \neq j$ on a $p_i \circ p_j = 0$ donc $p_i^2 = p_i$ , et $p_i$ est un projecteur .

9. On a $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout $i \in \{1,2,...,m\}$ , $N_i = \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$ .
   Les polynômes $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux , le théorème de décomposition des noyaux donne

$$\ker \chi_u(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \ker(u - \lambda_i id_E)^{\alpha_i}$$

   d'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $\chi_u(u) = 0$ donc $\ker \chi_u(u) = E$ d'où

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} N_i$$

10. $\triangleright$ La somme $\operatorname{Im} p_1 + \dots + \operatorname{Im} p_m$ est directe :
   Soit $(y_1, ..., y_m) \in \operatorname{Im} p_1 \times \dots \times \operatorname{Im} p_m$ tels que $y_1 + ... + y_m = 0$ , il existe $x_1, ..., x_m$ dans $E$ verifiant $y_i = p_i(x_i)$ pour tout $i$ dans $\{1, ..., m\}$ . Soit $i, j$ distinct dans $\{1, ..., m\}$ alors

$$p_i(y_j) = (p_i \circ p_j)(x_j) = 0 \text{ et } p_i(y_i) = (p_i \circ p_i)(x_i) = p_i(x_i) = y_i$$

   ce qui donne

$$p_i(y_1) + ... + p_i(y_m) = y_i = 0$$

donc $(y_1, ..., y_m) = (0, ..., 0)$ , ce qui prouve que la somme $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ est directe

$\triangleright$ $E = \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ :

On a $\operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m \subset E$ et $p_1 + \ldots + p_m = id_E$ donc pour tout $x$ dans $E$ on a $x = p_1(x) + \ldots + p_m(x)$ donc $x \in \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ par suite $E \subset \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ , d'où $E = \operatorname{Im} p_1 + \ldots + \operatorname{Im} p_m$ .

Ainsi on a $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} p_m$

11. D'après le théorème de Cayley-Hamilton on a $\pi_u$ divise $\chi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et l'ensemble des racines de $\pi_u$ est exactement le spectre de $u$ , donc $\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ avec $0 < \beta_i \leq \alpha_i$ , on a alors $P_i^{k_i} = (X - \lambda_i)^{\beta_i}$ , a l'indice près .

Soit $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $y_i = p_i(x_i) \in \operatorname{Im} p_i$ , puisque $P_i^{k_i}$ divise $(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $P_i^{k_i}(p_i) = \pi_u(u) = 0$ alors $(X - \lambda_i)^{\alpha_i} (p_i) = 0$ , par suite $y_i \in N_i$ et $\operatorname{Im} p_i \subset N_i$ .

D'autre part $E = \operatorname{Im} p_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} p_m = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m$ donc

$$\dim (\operatorname{Im} p_1) \oplus \ldots \oplus \dim (\operatorname{Im} p_m) = \dim (N_1) \oplus \ldots \oplus \dim (N_m)$$

Supposons qu'il existe $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tel que $\operatorname{Im} p_i \neq N_i$ donc $\dim (\operatorname{Im} p_i) < \dim (N_i)$ par suite

$$\dim (\operatorname{Im} p_1) \oplus \ldots \oplus \dim (\operatorname{Im} p_m) < \dim (N_1) \oplus \ldots \oplus \dim (N_m)$$

ce qui est absurde donc $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ on a $\dim (\operatorname{Im} p_i) = \dim (N_i)$ et $\operatorname{Im} p_i = N_i$ .

# Partie II

13. $u$ est diagonalisable donc son polynôme minimal est scindé à racines simples, et l'ensemble de ses racines est exactement le spectre de $u$ d'où :

$$\pi_u = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$$

14. On a , pour tout entier $i \in \{1, 2, \ldots, m\}, Q_i = \dfrac{\pi_u}{P_i}$ où $P_i = X - \lambda_i$, et $\theta_i = \dfrac{1}{Q_i(\lambda_i)}$.

$\triangleright$ Avec un peu de détails, la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{\pi_u}$ s'écrit :

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{X - \lambda_i}$$

avec $a_i = \left[\dfrac{P_i(X)}{\pi_u(X)}\right](\lambda_i) = \left[\dfrac{1}{Q_i(X)}\right](\lambda) = \theta_i$ donc

$$\frac{1}{\pi_u} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\theta_i}{X - \lambda_i}$$

▷ Cette relation donne

$$1=\sum_{i=1}^{m}\theta_i\frac{\pi_u}{X-\lambda_i}=\sum_{i=1}^{m}\theta_iQ_i$$

suivant les notation de Q10 on a pour tout entier $i\in\{1,2,\dots,m\}, p_i=\theta_iQ_i(u)=\dfrac{Q_i(u)}{Q_i\left(\lambda_i\right)}$.

15. On a vu dans la question précédente que : $1=\sum_{i=1}^m\theta_iQ_i$, donc

$$\begin{aligned}X&=\sum_{i=1}^{m}\theta_iQ_iX\\&=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\theta_iQ_i+\sum_{i=1}^{m}\theta_i(X-\lambda_i)Q_i\\&=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\theta_iQ_i+\sum_{i=1}^{m}\theta_i\pi_u\\&=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\theta_iQ_i+\left(\sum_{i=1}^{m}\theta_i\right)\pi_u\end{aligned}$$

Or : $\frac{1}{\pi_u}=\sum_{i=1}^m\frac{\theta_i}{X-\lambda_i}$, donc : $\frac{X}{\pi_u}=\sum_{i=1}^m\theta_i\frac{X}{X-\lambda_i}$, donc : pour tout $x>max_i|\lambda_i|, \frac{x}{\pi_u(x)}=\sum_{i=1}^m\theta_i\frac{x}{x-\lambda_i}$.

On suppose $m=\deg\pi_u\geq 2$ (sinon la relation est fausse), donc en passant à la limite $x\to+\infty$, on obtient $\sum_{i=1}^m\theta_i=0$, d'où $X=\sum_{i=1}^m\lambda_i\theta_iQ_i$.

Donc $u=X(u)=\sum_{i=1}^m\lambda_i\theta_iQ_i(u)=\sum_{i=1}^m\lambda_ip_i$ (reste vrai si $m=1$).

*remarque : pour obtenir cette dernière relation, on pouvait aussi la vérifier sur les vecteurs d'une base de vecteurs propres en utilisant le résultat de Q12, on n'a pas besoin alors de la décomposition sur les polynômes.*

16. **Exemple :** on considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$.

(a) La matrice $A$ est symétrique réelle donc elle est diagonalisable. Et $A^2=4I_4$.

(b) On a $A^2=4I_4$ donc $X^2-4$ est annulateur de $A$ et $\pi_A$ divise $X^2-4$ , $A$ n'est pas de la forme $\alpha I_4$ donc forcement $\deg\pi_A\geq 2$ par suite $\pi_A=X^2-4$.

On a

$$\frac{1}{\pi_u}=\frac{\theta_1}{X-2}+\frac{\theta_2}{X+2}$$

avec $\theta_1=\left[\dfrac{X-2}{\pi_u(X)}\right]_{X=2}=\dfrac{1}{4}$ et $\theta_2=\left[\dfrac{X+2}{\pi_u(X)}\right]_{X=-2}=\dfrac{-1}{4}$ , donc

$$\frac{1}{\pi_u}=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{X+2}+\frac{1}{X-2}\right)$$

et $Q_1=X-2$ , $Q_2=X+2$ .

Par suite $\Pi_1=\frac{Q_1(A)}{Q_1(-2)}=\frac{-1}{4}(A-2I_4)$ et $\Pi_2=\frac{Q_2(A)}{Q_2(2)}=\frac{1}{4}(A+2I_4)$ .

On trouve

$$\Pi_1 = \frac{1}{4}(-A+2I_4) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{4}(A+2I_4) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) On a les relations :

- ▷ $A = \lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2$
- ▷ $\Pi_1.\Pi_2 = \Pi_2.\Pi_1 = 0$
- ▷ $\Pi_1^k = \Pi_1$ , $\Pi_2^k = \Pi_2$ pour tout entier naturel $k$.

On btient pour tout entier naturel $k$ $A^k = \lambda_1^k\Pi_1 + \lambda_2^k\Pi_2$ , donc

$$A^k = 2^k\Pi_1 + (-2)^k\Pi_2 = 2^k\left(\Pi_1 + (-1)^k\Pi_2\right).$$

Ainsi pour tout entier naturel $k$ on a

$$A^{2k} = 4^k I_4 \text{ et } A^{2k+1} = 4^k A$$

17. On a $\mathbb{C}[v] = \{P(v)\ , P \in \mathbb{C}[X]\}$ , posons $\pi_v(X) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + .. + a_0$ .

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ on effectue la division euclidienne de $P$ par $\pi_v$ :

$$P = Q\pi_v + R \text{ avec } \deg R \leq d-1,$$

par substitution on a

$$P(v) = Q(v) \circ \pi_v(v) + R(v) = R(v),$$

donc $P(v) \in \text{vect}\left\{id_E, v, ..., v^{d-1}\right\}$ et $\mathbb{C}[v] \subset \text{vect}\left\{id_E, v, ..., v^{d-1}\right\}$ . Par suite $\dim \mathbb{C}[v] \leq d$.

Si on suppose que $\dim \mathbb{C}[v] \leq d-1$ alors la famille $\left\{id_E, v, ..., v^{d-2}\right\}$ est liée ainsi il existe un polynôme annulateur de $v$ de degré inferieur à $d-1$ ce qui contredit le fait que , $\pi_v$ est annulateur de degré minimal égal à $d$ .

Donc $\dim \mathbb{C}[v] = d$.

18. On a $\deg \pi_u = m = \dim \mathbb{C}[u]$ .

La famille $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre :

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ dans $\mathbb{C}^m$ tels que $\alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_m p_m = 0$ , on compose par $p_j$ , sachant que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et $p_i \circ p_i = p_i$ , on obtient $\alpha_j = 0$ , ainsi $(p_1, \ldots, p_m)$ est libre.

$(p_1, \ldots, p_m)$ est libre de cardinal $m$ donc c'est une base de $\mathbb{C}[u]$.

19. Si $u$ non diagonalisable, alors $\pi_u$ n'est pas scindé, donc $m$ le nombre de valeurs propres distinctes est strictement inférieur au degré de $\pi_u$ ; donc $(p_1, \ldots, p_m)$ qui a $m$ vecteurs n'est pas génératrice de $\mathbb{C}[u]$ de dimension strictement supérieure à $m$.

    Ce qui montre que lorsque $u$ n'est pas diagonalisable, $(p_1, \ldots, p_m)$ n'est jamais une base de $\mathbb{C}[u]$ (résultat plus fort que ce qui est demandé).

20. On suppose qu'il existe $m$ endomorphismes non nuls $f_i$ de $E$ et $m$ complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ distincts, tels que pour tout entier naturel $q$ on ait $u^q = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^q f_i$.

    Donc pour tout polynôme $P$ on a $P(u) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) f_i$ , en particulier le polynôme $P = \prod_{i=1}^{m} (X - \lambda_i)$ est annulateur à racines simples , donc $u$ est diagonalisable .