# DEVOIR MAISON 5 (Suites et séries de fonctions)
*Corrigé*

## Problème 1 : Séries trigonométriques (*D'après CCP MP 2017*)

### Partie 1 : exemples

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left|\frac{1}{2^n}C_n(x)+\frac{1}{3^n}S_n(x)\right| = \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leqslant \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx)\right| + \left|\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leqslant \underbrace{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}}_{\text{ne dépend pas de } x}.$$

Ainsi, $\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$ est un majorant de l'ensemble $\left\{\left|\frac{1}{2^n}C_n(x)+\frac{1}{3^n}S_n(x)\right|, x \in \mathbb{R}\right\}$ et $\left\|\frac{1}{2^n}C_n+\frac{1}{3^n}S_n\right\|_\infty^{\mathbb{R}}$ est le plus petit majorant de cet ensemble.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \left\|\frac{1}{2^n}C_n+\frac{1}{3^n}S_n\right\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$.
Or, les séries géométriques $\sum \frac{1}{2^n}$ et $\sum \frac{1}{3^n}$ convergent car $-1 < \frac{1}{2} < 1$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc par linéarité, la série numérique $\sum\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$ converge.
Par comparaison, on en déduit que la série $\sum \left\|\frac{1}{2^n}C_n+\frac{1}{3^n}S_n\right\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série trigonométrique } \sum\left(\tfrac{1}{2^n}C_n+\tfrac{1}{3^n}S_n\right) \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}.}$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$.
On a $\left|\frac{e^{ix}}{p}\right| = \frac{1}{p} < 1$ donc la série géométrique $\sum\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ converge et on a :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p-e^{ix}}.}$$

On a donc en multipliant numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{p^n} = \frac{p(p-\cos(x)+i\sin(x))}{(p-\cos(x))^2+\sin^2(x)}.$$

En prenant les parties réelle et imaginaire, on en déduit que les séries $\sum \frac{\cos(nx)}{p^n}$ et $\sum \frac{\sin(nx)}{p^n}$ convergent et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2-p\cos(x)}{p^2-2p\cos(x)+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2-2p\cos(x)+1}$$

Il reste à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$ :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4-2\cos(x)}{5-4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ avec égalité lorsque $x = \dfrac{\pi}{2n}$.
On en déduit $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est le maximum de la fonction $x \mapsto \left|\dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right|$ sur $\mathbb{R}$ d'où $\|\dfrac{1}{\sqrt{n}}S_n\|_\infty^\mathbb{R} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \geqslant 1$), on en déduit que :

$$\boxed{\text{la série trigonométrique } \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}} S_n \text{ ne converge pas normalement sur } \mathbb{R}.}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\exp(e^{ix}) &= \exp(\cos x + i\sin x) = \exp(\cos x)\exp(i\sin x) = \exp(\cos x)\left(\cos(\sin x) + i\sin(\sin x)\right)\\ &= \underbrace{\exp(\cos x)\cos(\sin x)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\exp(\cos x)\sin(\sin x)}_{\in\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Re}(\exp(e^{ix})) = \varphi(x)$.
Or, on sait de plus que pour tout complexe $z$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n!}$ converge et a pour somme $e^z$.
En appliquant ceci avec $z = e^{ix}$, on obtient :

$$\exp(e^{ix}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!}.$$

Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{e^{inx}}{n!}$ converge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{inx}}{n!}\right)$ converge et on a :

$$\mathrm{Re}(\exp(e^{ix})) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{e^{inx}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n!}.$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n!}$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est la somme de la série trigonométrique } \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} C_n.}$$

PARTIE 2 : PROPRIÉTÉS

### Une condition suffisante

5. On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leqslant |a_n\cos(nx)| + |b_n\sin(nx)| \leqslant \underbrace{|a_n| + |b_n|}_{\text{ne dépend pas de } x}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \|a_nC_n + b_nS_n\|_\infty^\mathbb{R} \leqslant |a_n| + |b_n|$.
Or, les séries $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ convergent donc par linéarité, la série numérique $\sum (|a_n| + |b_n|)$ converge.
Par comparaison, on en déduit que la série $\sum \|a_nC_n + b_nS_n\|_\infty^\mathbb{R}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si les séries } \sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ convergent absolument alors la série trigonométrique } \sum (a_nC_n + b_nS_n) \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}.}$$

**Une condition nécessaire**

6. Si $(a,b) = (0,0)$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|a\cos x + b\sin x| = 0 = \sqrt{a^2+b^2}$.
On suppose désormais $(a,b) \neq (0,0)$.
Comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, il existe $\varphi \in [0, 2\pi[$ tel que $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$|a\cos x + b\sin x| = \sqrt{a^2+b^2}|\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x| = \sqrt{a^2+b^2}|\cos(\varphi - x)| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$$
avec égalité lorsque $x = \varphi$.
Ainsi :
$$\boxed{\text{le maximum de la fonction } x \mapsto |a\cos x + b\sin x| \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \sqrt{a^2+b^2}.}$$

7. On suppose que la série $\sum \|a_nC_n + b_nS_n\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.
D'après la question précédente, en remarquant que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, lorsque $x$ parcourt $\mathbb{R}$ alors $nx$ parcourt $\mathbb{R}$, on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|a_nC_n + b_nS_n\|_\infty^{\mathbb{R}} = \underset{x\in\mathbb{R}}{\mathrm{Max}}|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| = \sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$
Or, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant |a_n| \leqslant \sqrt{a_n^2+b_n^2}$.
Comme la série $\sum\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ converge, on en déduit par comparaison que la série $\sum|a_n|$ converge c'est-à-dire que la série $\sum a_n$ converge absolument.
En raisonnant de même avec $b_n$, on déduit que :
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si la série } \sum(a_nC_n + b_nS_n) \text{ converge normalement sur } \mathbb{R} \text{ alors les séries} \\ \sum a_n \text{ et } \sum b_n \text{ sont absolument convergentes.}\end{array}}$$

**Autres propriétés**

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $a_nC_n + b_nS_n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
La série de fonctions $\sum(a_nC_n + b_nS_n)$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
On en déduit, par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, que la fonction $f$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :
$$f(x+2\pi) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_k\cos(nx+2n\pi) + b_k\sin(nx+2n\pi)) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = f(x)$$
par $2\pi$-périodicité des fonctions cosinus et sinus. Ainsi :
$$\boxed{f \in \mathscr{C}_{2\pi}.}$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient en linéarisant (on peut pour cela passer par les formules d'Euler) :
$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos(2nx)+1)\,dx = \left[\frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$
Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Comme la fonction $x \mapsto \sin(kx)\cos(nx)$ est impaire, on a :
$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx = 0.$$
$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx = \pi \text{ et } \int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx = 0}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))\cos(nx)\,dx.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k : x \mapsto (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))\cos(nx)$.
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |u_k(x)| \leqslant |a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)| \leqslant \underbrace{\|a_k C_k + b_k S_k\|_\infty^{\mathbb{R}}}_{\text{ne dépend pas de } x}.$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \|u_k\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \|a_k C_k + b_k S_k\|_\infty^{\mathbb{R}}$.
Comme la série $\sum \|a_k C_k + b_k S_k\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge, on en déduit par comparaison que la série $\sum \|u_k\|_\infty^{\mathbb{R}}$ converge.
Ainsi, la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$ donc sur le segment $[-\pi, \pi]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $u_k$ est continue sur $[-\pi, \pi]$.
On peut donc intervertir les symboles intégrale et somme :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\,dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx))\,dx \right)$$

Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$.
Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n(f) = a_n \text{ et } \alpha_0(f) = 2a_0.}$$

11. On utilise la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à $g$ et on obtient donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \alpha_n(g) \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \beta_n(g).}$$

12. D'après la question 8., on a $g \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ donc on a $g - f \in \mathscr{C}_{2\pi}$.
De plus, par linéarité de l'intégrale, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\alpha_n(g - f) = \alpha_n(g) - \alpha_n(f) = 0 \text{ et } \beta_n(g - f) = \beta_n(g) - \beta_n(f) = 0.$$

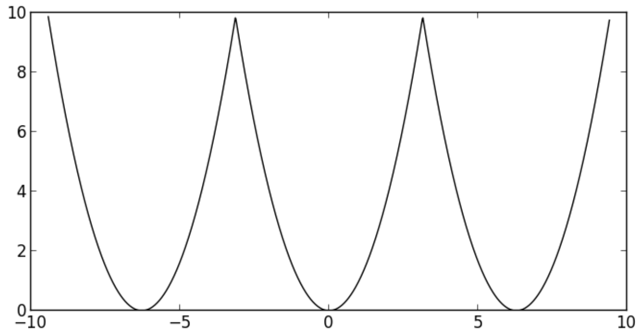
Par le résultat admis, on en déduit que $g - f$ est la fonction nulle.
Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout réel } x,\ g(x) = f(x).}$$

13. Si $f$ est une fonction paire alors la fonction $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et la fonction $x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\boxed{\beta_n(f) = 0 \text{ et } \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx.}$$

14. Ci-dessous le graphe de $f$ sur $[-3\pi, 3\pi]$ :




Comme la fonction $f$ est paire, on a :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \beta_n(f) = 0.}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx$$

Une double intégration par parties donne (les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,\pi]$) :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx &= \underbrace{\left[\frac{x^2\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)\,dx \\ &= -\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right) \\ &= \frac{2\pi\cos(n\pi)}{n^2} + \frac{1}{n}\underbrace{\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi}_{=0}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \alpha_n(f) = \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.}$$

On a aussi :

$$\boxed{\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2}{3}\pi^2.}$$

Comme les séries $\sum(\alpha_n(f))$ et $\sum(\beta_n(f))$ convergent absolument (série de Riemann d'exposant $2 > 1$ et série nulle), d'après la question 5., la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)C_n + \beta_n(f)S_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc d'après le résumé après la question 12., on a :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx).}$$

15. Pour $x = 0$, on a $f(0) = 0^2 = 0$ donc par la question précédente, $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = 0$ d'où :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

Pour $x = \pi$, on a $f(\pi) = \pi^2$ donc par la question précédente, $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n = \pi^2$ donc :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

On découpe cette somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (ce qui est possible car ces deux séries sont convergentes), on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.}$$

16. Dans l'exemple de la question 14, on a obtenu une série trigonométrique normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Cependant, sa somme $f$ n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, $f$ est dérivable à droite et gauche en $\pi$ avec pour nombres dérivés $2\pi$ (à gauche) et $-2\pi$ (à droite).

> La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On suppose que les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ sont absolument convergentes.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $a_nC_n + b_nS_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$(a_nC_n + b_nS_n)'(x) = -na_n\sin(nx) + nb_n\cos(nx).$$

- Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument car $|a_n| = o(\underbrace{n|a_n|}_{\geqslant 0})$ et $|b_n| = o(\underbrace{n|b_n|}_{\geqslant 0})$.
  On en déduit (question 5.) que la série trigonométrique $\sum(a_nC_n + b_nS_n)$ converge normalement et donc simplement sur $\mathbb{R}$.
- Les séries $\sum(-na_n)$ et $\sum nb_n$ convergent absolument donc (question 5.) la série trigonométrique $\sum(a_nC_n + b_nS_n)'$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

On en déduit, par le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des sommes de séries de fonctions, que la fonction somme de la série trigonométrique $\sum(a_nC_n + b_nS_n)$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on peut la dériver terme à terme.

> La convergence absolue des séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ est donc une condition suffisante.

17. On a vu à la question 2. que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{1}{3^n}$.
Comme les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ convergent absolument (par le critère de d'Alembert pour $\sum nb_n$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{3^n} > 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}}\frac{3^n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} < 1$), d'après la question précédente, on peut dériver terme à terme. On obtient alors en dérivant l'égalité ci-dessus :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2}\frac{5\cos(x) - 3}{(5 - 3\cos(x))^2}.}$$

Problème 2 : Produits infinis (*D'après Centrale PC 2024*)

**Q1.** Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
L'initialisation pour $n = 1$ est claire car les deux membres de l'inégalité donnent $|x_1|$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'inégalité vérifiée au rang $n$ et montrons-la au rang $n+1$.
Soit $x_1, \dots, x_{n+1}$ $n+1$ réels. On a :

$$\begin{aligned}
\left|\left(\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k)\right)-1\right| &= \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1+x_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right| \\
&\leqslant \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1\right| + \left|x_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)-1+|x_{n+1}|\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|) \quad \text{(hypothèse de récurrence et IT)} \\
&\leqslant (1+|x_{n+1}|)\left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)-1 \\
&\leqslant \left(\prod_{k=1}^{n+1}(1+|x_k|)\right)-1.
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{\text{pour tout } (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left|\left(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\right)-1\right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n}(1+|x_k|)\right)-1.}$$

**Q2.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x \leqslant e^x$ (ce résultat s'obtient par une simple étude de la fonction $x \mapsto e^x - x - 1$ ou par convexité de exp - courbe située au-dessus de la tangente en 0 -).
Soit $(x_1,\dots,x_n) \in [-1,+\infty[^n$. On a donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ :

$$0 \leqslant 1 + x_k \leqslant e^{x_k}.$$

En multipliant ces inégalités (à termes positifs), on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{x_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } (x_1,\dots,x_n) \in [-1,+\infty[^n,\ \prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).}$$

**Q3.** Soit $t \in \mathbb{C}$. On a par inégalité triangulaire puis croissance (pour tout $k \geqslant 2$, $0 < (k-2)! \leqslant k!$ et toutes les séries en jeu convergent) :

$$|(1+t)-e^t| = \left|1+t-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\right| = \left|-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^k}{k!} \leqslant |t|^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|t|^{k-2}}{(k-2)!} = |t|^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|t|^k}{k!} = |t|^2 e^{|t|}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{C},\ |(1+t)-\mathrm{e}^t| \leqslant |t|^2\mathrm{e}^{|t|}.}$$

**Q4.** On a par inégalité triangulaire :

$$|a^n - b^n| = \left|(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-1-k}\right| \leqslant |a-b|\sum_{k=0}^{n-1}\underbrace{|a|^k}_{\leqslant M^k}\underbrace{|b|^{n-1-k}}_{M^{n-1-k}} \leqslant nM^{n-1}|a-b|.$$

$$\boxed{|a^n - b^n| \leqslant nM^{n-1}|a-b|.}$$

**Q5.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M = \max\left\{\left|1+\frac{z}{n}\right|, \left|e^{\frac{z}{n}}\right|\right\}$.
D'après les questions précédentes :

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| = \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(e^{\frac{z}{n}}\right)^n\right| \leqslant nM^{n-1}\left|1+\frac{z}{n}-e^{\frac{z}{n}}\right| \leqslant nM^{n-1}\left|\frac{z}{n}\right|^2 e^{\frac{|z|}{n}}.$$

De plus, on a $\left|1+\frac{z}{n}\right| \leqslant 1+\frac{|z|}{n} \leqslant e^{\frac{|z|}{n}}$ et $\left|e^{\frac{z}{n}}\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{n^k k!}\right| \leqslant e^{\frac{|z|}{n}}$ (obtenu par inégalité triangulaire) donc

$$M \leqslant e^{\frac{|z|}{n}}.$$

Par conséquent :

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| \leqslant nM^{n-1}\left|\frac{z}{n}\right|^2 e^{\frac{|z|}{n}} \leqslant \frac{|z|^2}{n}e^{\frac{(n-1)|z|}{n}}e^{\frac{|z|}{n}} = \frac{|z|^2}{n}e^{|z|}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^\star,\ \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \mathrm{e}^z\right| \leqslant \frac{|z|^2}{n}\mathrm{e}^{|z|}.}$$

**Q6.** On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant |u_n - e^z| \leqslant \frac{|z|^2}{n}e^{|z|} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{|z|^2}{n}e^{|z|} = 0$$

donc par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}|u_n - e^z| = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = e^z.}$$

**Q7.** Pour $N \geqslant 2$, on a :

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \prod_{n=2}^{N}\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \frac{\prod_{n=2}^{N}(n-1)}{\prod_{n=2}^{N} n}\frac{\prod_{n=2}^{N}(n+1)}{\prod_{n=2}^{N} n} = \frac{1}{N}\frac{N+1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2N}.$$

Ainsi :

$$\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}\right) = \frac{1}{2}.$$

On a donc établi que :

$$\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n\geqslant 2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \text{ converge et } \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.}$$

Et pour $N \geqslant 2$, en séparant le produit pour $n = 2k$ (alors $n+(-1)^{n+1} = 2k-1$) et $n = 2k-1$ (alors $n+(-1)^{n+1} = 2k$), on obtient :

$$\prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \frac{1}{(2N)!}\prod_{n=2}^{2N}\left(n+(-1)^{n+1}\right) = \frac{1}{(2N)!}\prod_{k=1}^{N}(2k-1)\prod_{k=2}^{N}(2k) = \frac{1}{(2N)!}(2N-1)! = \frac{1}{2}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{1}{2}.$$

De plus, on a :

$$\prod_{n=2}^{2N+1}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = \prod_{n=2}^{2N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\times\left(1+\frac{(-1)^{2N+2}}{2N+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2N+1}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{1}{2}.$$

Par propriété des suites extraites d'indices pairs et impairs, on en déduit que :

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{le produit infini } \prod_{n\geqslant 2}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) \text{ converge et } \prod_{n=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)=\frac{1}{2}.}$$

**Q8.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a par intégration par parties :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos u)^{n+1} \cos u \mathrm{d}u = \underbrace{\left[(\cos u)^{n+1} \sin u\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(-\sin u)(\cos u)^n \sin u \mathrm{d}u$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(\cos u)^n \sin^2 u \mathrm{d}u = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(\cos u)^n (1-\cos^2 u)\mathrm{d}u = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$$

d'où $\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.}$

Montrons alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Pour $n=0$, on a $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \mathrm{d}u = [\sin u]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 = \frac{2^0(0!)^2}{1!}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

On a alors par l'égalité précédente et l'hypothèse de récurrence :

$$W_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3} W_{2n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2(n+1)}{2n+2} \frac{2(n+1)}{2n+3} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

**Q9.** On utilise la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{et} \quad (2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}.$$

Ainsi :

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{(2n)} \frac{2\pi n (n/e)^{2n}}{2\sqrt{\pi n}(2n/e)^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

$$\boxed{W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{4k^2-1}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)} = 4^n (n!)^2 \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)(2k)}{(2n)!(2n+1)!} = (2n+1)W_{2n+1}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\prod_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right) \text{ converge et } \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}.}$$

**Q10.** Pour tout $N \geqslant n$, d'après Q2 (sachant que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $-P(A_p) \geqslant -1$), on a :

$$0 \leqslant \prod_{p=n}^{N} (1-P(A_p)) \leqslant \exp\left(\sum_{p=n}^{N} -P(A_p)\right)$$

La série $\sum P(A_p)$ étant divergente et à termes positifs, on en déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=p}^{N} P(A_p) = +\infty$.
Par conséquent :

$$\lim_{N\to+\infty} \exp\left(\sum_{p=n}^{N} -P(A_p)\right) = 0.$$

On conclut avec le théorème d'encadrement que :

$$\boxed{\prod_{p\geqslant n}(1-P(A_p)) \text{ converge et } \prod_{p=n}^{+\infty}(1-P(A_p)) = 0.}$$

**Q11.** La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_n = \bigcup\limits_{p\geqslant n} A_p$ est décroissante pour l'inclusion donc par continuité décroissante, on a :

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right).$$

Or pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$P\left(\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = 1 - P\left(\bigcap_{p\geqslant n}\overline{A_p}\right)$$

et par continuité décroissante appliquée à la suite $(C_q)_{q\geqslant n}$ où $C_q = \bigcap\limits_{p=n}^{q}\overline{A_p}$, décroissante pour l'inclusion, on obtient :

$$P\left(\bigcap_{p\geqslant n}\overline{A_p}\right) = \lim_{q\to+\infty} P\left(\bigcap_{p=n}^{q}\overline{A_p}\right) \underset{\text{indep.}}{=} \lim_{q\to+\infty}\prod_{p=n}^{q} P\left(\overline{A_p}\right) = \prod_{p=n}^{+\infty}(1-P(A_p)) \underset{\text{Q10}}{=} 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{p\geqslant n} A_p\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - P\left(\bigcap_{p\geqslant n}\overline{A_p}\right)\right) = 1.}$$

**Q12.** Soit $x\in S$ et $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}(x) - Q_n(x) &= \left(\prod_{k=1}^{n}(1+\underbrace{|f_k(x)|}_{\geqslant 0})\right)(1+|f_{n+1}(x)|-1)\\
&\underset{\text{Q2}}{\leqslant} \exp\left(\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|\right)|f_{n+1}(x)|\\
&\leqslant \exp\left(R_0(x)\right)|f_{n+1}(x)| \quad \text{car} \sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}|f_k(x)| = R_0(x).
\end{aligned}$$

Par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, sachant que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|f_n|$ est continue sur $S$ et $\sum_{n\geqslant 1}|f_n|$ converge uniformément sur $S$, on en déduit que $R_0$ est continue sur le segment $S$ donc $R_0$ est bornée sur $S$.
Par conséquent, il existe $M>0$ tel que pour tout $x\in S$, $R_0(x)\leqslant M$.
On a ainsi pour tout $x\in S$ et $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leqslant e^{R_0(x)}|f_{n+1}(x)| \leqslant e^{M}|f_{n+1}(x)|.}$$

**Q13.** Soit $x\in S$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
|P_{n+1}(x) - P_n(x)| &= |1+f_{n+1}(x)-1|\left|\prod_{k=1}^{n}(1+f_k(x)\right|\\
&\leqslant |f_{n+1}(x)|\prod_{k=1}^{n}(1+|f_k(x)|) \text{ (inégalité triangulaire)}\\
&\leqslant (1+|f_{n+1}(x)|-1)\,Q_n(x).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant Q_{n+1}(x) - Q_n(x).}$$

**Q14.** Commençons par la convergence simple. Soit $x \in S$.
Par les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant |P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leqslant e^M |f_{n+1}(x)|$.
La série $\sum_{n\geqslant 1} |f_{n+1}(x)|$ est convergente car la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} |f_n|$ converge uniformément donc simplement sur $S$.
Par comparaison par inégalité, on en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} (P_{n+1}(x) - P_n(x))$ est absolument convergente et donc convergente.
Comme il s'agit d'une série télescopique, on en déduit que la suite $(P_n(x))_{n\geqslant 1}$ est convergente et on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \prod_{k=1}^{+\infty} (1 + f_k(x)) = P(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in S$. En utilisant le télescopage on a :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (P_{k+1}(x) - P_k(x)) = \lim_{N\to+\infty} P_N(x) - P_n(x) = P(x) - P_n(x).$$

On a donc avec les inégalités des questions précédentes :

$$|P_n(x) - P(x)| = \left| - \sum_{k=n}^{+\infty} (P_{k+1}(x) - P_k(x)) \right| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} |P_{k+1}(x) - P_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} e^M |f_{k+1}(x)| = e^M R_n(x) \leqslant e^M \|R_n\|_\infty^S$$

en notant $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)|$.
On en déduit que $\|R_n\|_\infty^S$ est un majorant de l'ensemble $\{|P_n(x) - P(x)|, x \in S\}$.
Comme $\|P_n - P\|_\infty^S$ est le plus petit des majorants de cet ensemble, on en déduit :

$$\|P_n - P\|_\infty^S \leqslant e^M \|R_n\|_\infty^S.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_{+\infty}^S = 0$ car la série $\sum |f_n|$ converge uniformément sur $S$, on en déduit par le théorème des gendarmes que :

$$\lim_{n\to+\infty} \|P_n - P\|_\infty = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (P_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers } P \text{ sur } S.}$$

**Q15.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n$ est continue sur $S$ par produit (fini) de fonctions continues (toutes les fonctions $f_k$ sont continues sur $S$) et la suite de fonctions $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $S$ donc par le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions :

$$\boxed{\text{la fonction } P \text{ est continue sur } S.}$$

Soit $x \in S$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $1 + f_k(x) > 0$, on a :

$$\ln(P_n(x)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + f_k(x)).$$

De plus, la série $\sum_{k\geqslant 1} \ln(1 + f_k(x))$ est (absolument) convergente car :

- $\lim_{k\to+\infty} f_k(x) = 0$ donc $|\ln(1 + f_k(x))| \underset{k\to+\infty}{\sim} |f_k(x)| \geqslant 0$,
- la série $\sum_{k\geqslant 1} |f_k(x)|$ est convergente (par convergence simple de $\sum_{k\geqslant 1} |f_k|$ sur $S$).

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(P_n(x)) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \ln(1+f_k(x)) = L(x) \in \mathbb{R}$.
Par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(P_n(x))} = e^{L(x)} > 0 \text{ donc } P(x) > 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{la fonction } P \text{ ne s'annule pas sur } \mathbb{R}.}$$

**Q16.** On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = -e^{-nx^2}$.
Appliquons la question précédente. Pour cela, il faut vérifier toutes les hypothèses sur la suite $(f_n)$.
Soit $S = [a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$.
On a :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a,b]$, $f_n(x) > -1$ car $e^{-nx^2} < 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n$ est continue sur $S$.
- Montrons que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} |f_n|$ converge uniformément sur $S$.
  On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty^S = e^{-na^2}$ car la fonction $|f_n|$ est décroissante sur $S$.
  De plus, la série $\sum e^{-na^2} = (e^{-a^2})^n$ converge (série géométrique avec $|e^{-a^2}| = e^{-a^2} < 1$).
  On en déduit que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $S$.

Par conséquent, d'après les deux questions précédentes, $f$ est bien définie et continue sur $S$ et ceci pour tout segment $S$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\boxed{f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

**Q17.** Soit $x$ et $y$ deux réels tels que $0 < x \leqslant y$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-nx^2 \geqslant -ny^2$ donc $1 - e^{-nx^2} \geqslant 1 - e^{-ny^2} \geqslant 0$, donc en multipliant ces inégalités :

$$\prod_{n=1}^{N} (1 - e^{-nx^2}) \geqslant \prod_{n=1}^{N} (1 - e^{-ny^2}) \quad \text{d'où} \quad f(x) \geqslant f(y) \text{ par passage à la limite } N \to +\infty$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

*Limite en* 0. On applique la question Q2 :

$$\forall x > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \prod_{n=1}^{N} \left(1 - e^{-nx^2}\right) \leqslant \exp\left(\sum_{n=1}^{N} -e^{-nx^2}\right).$$

Or, pour tout $x > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -e^{-nx^2} = \dfrac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$ (série géométrique de raison $e^{-x^2} \in [0,1[$) d'où par passage à la limite quand $N \to +\infty$ :

$$\forall x > 0 \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \exp\left(\frac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right).$$

Or, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = -\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp\left(\dfrac{-e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}\right) = 0$.
On obtient donc par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.}$$

*Limite en* $+\infty$. On applique la question Q1 puis Q2 :

$$\forall x > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\left(\prod_{k=1}^{n} (1 - e^{-kx^2})\right) - 1\right| \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} 1 + \left|-e^{-kx^2}\right|\right) - 1 \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-kx^2}\right) - 1.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, en utilisant $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-kx^2} = \frac{e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$, on obtient :

$$\forall x > 0, \quad |f(x) - 1| \leqslant \exp\left(\frac{e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}\right) - 1.$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}\right) = 1$ d'où par le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} |f(x) - 1| = 0 \quad \text{soit} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$$

**Q18.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $P_n$ est dérivable en tant que produit (fini) de fonctions dérivables et on a par dérivation du produit $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 + f_k(x))$ :

$$\forall x \in S, \quad P'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq k}}^{n} (1 + f_\ell(x)) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) \frac{P_n(x)}{1 + f_k(x)} = P_n(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{1 + f_k(x)}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^\star \text{ et } x \in \mathcal{S},\ P_n'(x) = P_n(x) \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{1 + f_k(x)}.}$$

**Q19.** Notons pour $x \in S$, $T(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f_k'(x)}{1 + f_k(x)}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k'(x)}{1 + f_k(x)}$.
On sait par les questions 14 et 15 que la suite $(P_n)$ converge uniformément sur $S$ vers $P$ et les fonctions $P_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) et $P$ sont continues sur le segment $S$ donc elles sont bornées sur $S$. Ainsi, la suite $(P_n)$ converge vers $P$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{B}(S,\mathbb{R}), \|.\|_\infty^S)$.
De même, la suite $(T_n)$ converge uniformément sur $S$ vers $T$ et les fonctions $T_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$) sont continues sur $S$ (par somme finie puisque les fonctions $f_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et $1 + f_n$ ne s'annule pas sur $S$) et donc la fonction $T$ est aussi continue sur $S$ (par le théorème de continuité de la limite). Ainsi, la suite $(T_n)$ converge vers $T$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{B}(S,\mathbb{R}), \|.\|_\infty^S)$.
Par produit, on en déduit que $(P_nT_n)$ converge vers $PT$ dans l'espace vectoriel normé $(\mathscr{B}(S,\mathbb{R}), \|.\|_\infty^S)$ donc la suite $(P_nT_n)$ converge uniformément vers $PT$ sur $S$.
On peut maintenant appliquer le théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $S$,
- la suite $(P_n)$ converge simplement sur $S$ vers $P$,
- la suite $(P_n')$ converge uniformément sur $S$ vers $PT$.

Par conséquent, $P = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $S$ et pour tout $x \in S$, $P'(x) = P(x)T(x)$ et comme $P(x) \neq 0$ d'après Q15, on a $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = T(x)$.
Ainsi :

$$\boxed{P \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{S} \text{ et } \forall x \in \mathcal{S},\ \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}.}$$

**Q20.** D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
P_n(X) &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left( \frac{i^k}{(2n+1)^k} X^k - \frac{(-i)^k}{(2n+1)^k} X^k \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left( \frac{i^{2n+1} - (-i)^{2n+1}}{(2n+1)^{2n+1}} X^{2n+1} + R(X) \right) \quad \text{avec } R \in \mathbb{R}_{2n}[X] \\
&= \underbrace{\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2n+1}}}_{\neq 0} X^{2n+1} + R(X).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{P_n \text{ est un polynôme de degré } 2n+1.}$$

**Q21.** Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$.

$$\begin{aligned} 2iP_n(x_k) &= \left(1 + \frac{ix_k}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(1 - \frac{ix_k}{2n+1}\right)^{2n+1} \\ &= \left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)^{2n+1} - \left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) - i\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 2iP_n(x_k) &= \frac{1}{\cos^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\left(e^{\frac{ik\pi}{2n+1}(2n+1)} - e^{\frac{-ik\pi}{2n+1}(2n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{\cos^{2n+1}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\left(e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}\right) = 0. \end{aligned}$$

Donc $x_k$ est une racine de $P_n$ pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.
De plus, $k \mapsto x_k$ est injective (par injectivité de la fonction tangente sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$) donc l'ensemble $\{x_k, k \in [\![0, 2n]\!]\}$ contient $2n+1$ racines distinctes de $P_n$ qui est un polynôme de degré $2n+1$ ; on a donc toutes les racines de $P_n$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des racines de } P_n \text{ est donc } \{x_k \,|\, k \in [\![0, 2n]\!]\}.}$$

**Q22.** On regroupe les racines $x_k$ deux à deux, en remarquant que pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $2n+1-k \in [\![n+1, 2n]\!]$ et on a :

$$x_{2n+1-k} = (2n+1)\tan\left(\frac{(2n+1)\pi - k\pi}{2n+1}\right) = (2n+1)\tan\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right) = -(2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -x_k.$$

D'après la question précédente, on peut factoriser $P$ dans $\mathbb{C}[X]$ de la façon suivante : il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$\begin{aligned} P_n(X) = \mu\prod_{k=0}^{2n}(X - x_k) &= \mu(X - x_0)\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)\prod_{k=n+1}^{2n}(X - x_k) \\ &= \mu X\prod_{k=1}^{n}(X - x_k)\prod_{k=1}^{n}(X - \underbrace{x_{2n+1-k}}_{=-x_k}) \quad \text{(changement d'indice)} \\ &= \mu X\prod_{k=1}^{n}(X^2 - x_k^2) \\ &= \mu\prod_{k=1}^{n}(-x_k^2)X\prod_{k=1}^{n}\frac{X^2 - x_k^2}{-x_k^2} \quad (\text{pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ x_k \neq 0) \\ &= \underbrace{\mu(-1)^n\prod_{k=1}^{n}x_k^2}_{=\lambda}\, X\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right). \end{aligned}$$

Il suffit de poser $\lambda = \mu(-1)^n\prod_{k=1}^{n}x_k^2$ pour obtenir l'égalité demandée.

$$\boxed{\text{Il existe } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tel que } P_n(X) = \lambda X\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right).}$$

**Q23.** En reprenant la définition de $P_n$, sachant que $P_n'(0)$ est le coefficient devant $X$ dans $P_n(X)$, on a :

$$P_n'(0) = \frac{1}{2i}\binom{2n+1}{1}\frac{i^1 - (-i)^1}{2n+1} = 1.$$

De plus en dérivant $P_n$ avec l'expression de la question Q22, en notant $Q_n(X) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right)$, on obtient :

$$P_n'(X) = \lambda\left(XQ_n'(X) + Q_n(X)\right) \quad \text{d'où} \quad P_n'(0) = \lambda Q_n(0) = \lambda.$$

Donc $\lambda = P_n'(0) = 1$ d'où le résultat.

$$\boxed{P_n(X) = X\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{X^2}{x_j^2}\right).}$$

**Q24.** Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question Q6 :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} = e^{ix} \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{ix}{2n+1}\right)^{2n+1} = e^{-ix}.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = \sin(x)$$

Donc :

$$\boxed{\text{la suite de fonctions polynomiales } (P_n) \text{ converge simplement vers la fonction sinus sur } \mathbb{R}.}$$

**Q25.** Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$.
On note $x_j(t) = (2\lfloor t\rfloor + 1)\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t\rfloor + 1}\right)$.

— *Cas 1 : $t < k-1$*
  On a $v_k(t) = v_{k-1}(t) = P_{\lfloor t\rfloor}(x)$. L'inégalité est claire.
— *Cas 2 : $k-1 \leqslant t < k$*
  On a $\lfloor t\rfloor = k-1$ et $x_j(t) = x_j(k-1)$. Donc :

$$v_k(t) = P_{\lfloor t\rfloor}(x) = P_{k-1}(x) = x\prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - \frac{x^2}{[x_j(k-1)]^2}\right) \text{(d'après Q23)}$$

  et

$$v_{k-1}(t) = x\prod_{j=1}^{k-1}\left(1 - \frac{x^2}{x_j(t)^2}\right) = v_k(t).$$

  L'inégalité demandée est alors évidente.
— *Cas 3 : $t \geqslant k$*
  Alors :

$$v_k(t) = x\prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{x^2}{x_j(t)^2}\right) = v_{k-1}(t)\left(1 - \frac{x^2}{x_k(t)^2}\right)$$

  donc :

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| = |v_{k-1}(t)|\left|\left(1 - \frac{x^2}{x_k(t)^2}\right) - 1\right| = |v_{k-1}(t)|\frac{x^2}{x_k(t)^2}.$$

  Or pour tout $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan u \geqslant u$ (inégalité des accroissements finis à partir de l'inégalité $\tan'(u) = 1 + \tan^2(u) \geqslant 1$) d'où $x_k(t) \geqslant k\pi$.
  Par conséquent,

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| = |v_{k-1}(t)|\frac{x^2}{x_k(t)^2} \leqslant |v_{k-1}(t)|\frac{x^2}{k^2\pi^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } k \geqslant 2,\ |v_k(t) - v_{k-1}(t)| \leqslant \frac{x^2}{k^2\pi^2}|v_{k-1}(t)|.}$$

**Q26.** Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
*Premier cas : $t \geqslant k$*
On applique l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de la question 2 :

$$|v_k(t)| = |x| \prod_{j=1}^{k} \left|1 - \frac{x^2}{x_j(t)^2}\right| \leqslant |x| \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{x^2}{x_j(t)^2}\right) \leqslant |x| \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{x^2}{x_j(t)^2}\right).$$

Or, $x_j(t)^2 \geqslant (j\pi)^2$ (cf question précédente) et par croissance de la fonction exp :

$$|v_k(t)| \leqslant |x| \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{x^2}{x_j(t)^2}\right) \leqslant |x| \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

*Deuxième cas : $t < k$*
On utilise le premier cas pour obtenir la première inégalité, puis la croissance de exp :

$$|v_k(t)| = |P_{\lfloor t \rfloor}(x)| = \left|x \prod_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} \left(1 - \frac{x^2}{x_j(t)^2}\right)\right| = |v_{\lfloor t \rfloor}(t)| \underset{\text{cas 1}}{\leqslant} |x| \exp\left(\sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) \leqslant |x| \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

Dans tous les cas :

$$\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbb{R}_+ \text{ et } k \in \mathbb{N}^\star,\ |v_k(t)| \leqslant |x| \exp\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).}$$

**Q27.** Par les inégalités obtenues aux deux questions précédentes, on a :

$$\begin{aligned}
\forall k \geqslant 2, \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |v_k(t) - v_{k-1}(t)| &\leqslant \frac{x^2}{k^2\pi^2} |v_{k-1}(t)| \\
&\leqslant \frac{|x|^3}{k^2\pi^2} \exp\left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) \\
&\leqslant \frac{|x|^3}{k^2\pi^2} \exp\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) \text{(série à termes positifs convergente).}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\forall k \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \|v_k - v_{k-1}\|_\infty^{\mathbb{R}_+} \leqslant \frac{|x|^3}{k^2\pi^2} \exp\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

Or, la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} \frac{1}{k^2} \underbrace{\frac{|x|^3}{\pi^2} \exp\left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)}_{\text{constante}}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$).

Par comparaison, on en déduit que la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} \|v_k - v_{k-1}\|_\infty^{\mathbb{R}_+}$ est convergente ce qui signifie que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k \geqslant 2} (v_k - v_{k-1})$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{k \geqslant 2} (v_k - v_{k-1}) \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+.}$$

**Q28.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1} \quad \text{donc} \quad \lim_{t \to +\infty} \tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)(2\lfloor t \rfloor + 1) = j\pi$$

D'où par produit fini de limites finies :

$$\lim_{t \to +\infty} v_k(t) = \lim_{t \to +\infty} x \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{x^2}{\left(\tan\left(\frac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1}\right)(2\lfloor t \rfloor + 1)\right)^2}\right) = x \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).$$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Pour tout entier $k > t$, $v_k(t) = P_{\lfloor t \rfloor}(x)$ donc

$$\lim_{k\to+\infty} v_k(t) = P_{\lfloor t \rfloor}(x).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^\star,\ \lim_{t\to+\infty} v_k(t) = x\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) \text{ et, pour tout } t \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{k\to+\infty} v_k(t) = P_{\lfloor t \rfloor}(x).}$$

**Q29.** Notons pour $t \in \mathbb{R}_+$ :

$$V(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} (v_k(t) - v_{k-1}(t)) = \lim_{k\to+\infty} v_k(t) - v_1(t) \underset{\text{Q28}}{=} P_{\lfloor t \rfloor}(x) - v_1(t).$$

D'après la question Q24, $\lim\limits_{t\to+\infty} P_{\lfloor t \rfloor}(x) = \sin(x)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} v_1(t) = x\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)$ donc :

$$\lim_{t\to+\infty} V(t) = \sin(x) - x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right).$$

Calculons maintenant $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$ à l'aide du théorème de la double limite :

— pour chaque $k \geqslant 2$, d'après la question précédente :

$$\lim_{t\to+\infty} v_k(t) - v_{k-1}(t) = x\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) - x\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right),$$

— la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 2}(v_k - v_{k-1})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et $+\infty$ est une borne de $\mathbb{R}_+$.

Donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} V(t) = \lim_{t\to+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} v_k(t) - v_{k-1}(t) &= \sum_{k=2}^{+\infty}\lim_{t\to+\infty}(v_k(t) - v_{k-1}(t)) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} x\left(\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) - \prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)\right) \\
&= x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) - x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right) \quad \text{par télescopage.}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sin(x) - x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right) = \lim_{t\to+\infty} V(t) = x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) - x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right).$$

D'où :

$$\boxed{\sin(x) = x\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(j\pi)^2}\right).}$$

**Q30.** On va appliquer le résultat de la question 19 avec $S = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto -\dfrac{x^2}{(n\pi)^2}$.

Commençons par vérifier que $(f_n)$ vérifie bien les hypothèses de la question 19.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in S$, on a $\dfrac{x^2}{\pi^2} \leqslant \dfrac{1}{4}$ donc $f_n(x) \geqslant \dfrac{-1}{4n^2} > -1$.

— La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}|f_n|$ converge uniformément sur $S$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty^S = \frac{1}{4n^2}$ (par parité et croissance de $|f_n|$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$) donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\|f_n\|_\infty^S$ converge ce qui signifie que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1}|f_n|$ converge normalement donc uniformément sur $S$.

— La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f_n'}{1+f_n}$ converge uniformément sur $S$ car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in S, \qquad \left|\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)}\right| = \left|\frac{-2x}{(n\pi)^2-1}\right| \leqslant \frac{\pi}{(n\pi)^2-1}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant \left\|\frac{f_n'}{1+f_n}\right\|_\infty^S \leqslant \frac{\pi}{(n\pi)^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}.$$

On en déduit la convergence normale sur $S$ (donc uniforme) de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \frac{f_n'}{1+f_n}$.

On peut donc maintenant appliquer le résultat de la question 19 avec pour $x \in S \setminus \{0\}$ :

$$P(x) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1+f_n(x)) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{(n\pi)^2}\right) = \frac{\sin x}{x}$$

et donc $P'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$ :

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f_n'(x)}{1+f_n(x)} \quad \text{soit} \quad \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin x} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2x}{(n\pi)^2-x^2}.$$

On en déduit :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}, \ \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2x}{(j\pi)^2-x^2}.}$$

**Q31.** Utilisons l'indication. On a $x^2\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ et

$$x\cos(x)-\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) - x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{-x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2\sin(x)} = -\frac{1}{3}.$$

De plus pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$, en utilisant la question précédente :

$$\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2\sin(x)} = \frac{1}{x}\left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right) = -\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2}{(j\pi)^2-x^2}.$$

Or, la série de fonctions $\sum_{j\geqslant 1} g_j$ où $g_j(x) = \frac{2}{(j\pi)^2-x^2}$ converge uniformément sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ car pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\|g_j\|_\infty^{]0,\frac{\pi}{2}]} = \frac{2}{(j\pi)^2-\frac{\pi^2}{4}}$ (puisque $|g_j|$ est croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$) d'où la convergence normale de la série $\sum_{j\geqslant 1} g_j$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $g_j$ a une limite finie en 0 donc par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x\to 0^+}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2}{(j\pi)^2-x^2} = \sum_{j=1}^{+\infty}\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{(j\pi)^2-x^2} = \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2}{(j\pi)^2}.$$

D'où :

$$-\frac{1}{3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2\sin(x)} = -\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{2}{(j\pi)^2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$