DM6 (Réduction)
Pour le jeudi 4 décembre

Problème 1 : Matrices tridiagonales symétriques et matrices blocs (niveau 1)

Dans tout cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

Objectifs
Dans la **partie I**, on détermine les éléments propres d'une matrice tridiagonale symétrique réelle particulière. Dans la **partie II**, on démontre des résultats sur les matrices par blocs.

Partie I – Éléments propres d'une matrice

I.1 – Localisation des valeurs propres

On considère une matrice $A = ((a_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soient une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de A et un vecteur propre associé $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \smallsetminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}$.

1. Montrer que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a : $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$.

2. Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{j\in[\![1,n]\!]} |x_j|$. Montrer que : $|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$.

   En déduire que :
$$|\lambda| \leqslant \max_{i\in[\![1,n]\!]} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right\}.$$

Soient α et β deux nombres réels. On considère la matrice $A_n(\alpha,\beta) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par:
$$A_n(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \cdots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$. Montrer que :
$$|\lambda| \leqslant |\alpha| + 2|\beta|.$$

I.2 – Calcul des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$

4. En utilisant la question précédente, montrer que pour toute valeur propre λ de $A_n(0,1)$, il existe $\theta \in [0,\pi]$ tel que $\lambda = 2\cos(\theta)$.

On note $\chi_{A_n(0,1)}$ le polynôme caractéristique de $A_n(0,1)$ et U_n le polynôme $\chi_{A_n(0,1)}(2X)$.

5. Établir, pour $n \geqslant 3$, une relation entre $\chi_{A_n(0,1)}$, $\chi_{A_{n-1}(0,1)}$ et $\chi_{A_{n-2}(0,1)}$.
   En déduire, pour $n \geqslant 3$, une relation entre U_n, U_{n-1} et U_{n-2}.

6. Montrer par récurrence sur n que pour tout $\theta \in]0,\pi[$:
$$U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.$$

7. Déduire de la question précédente que l'ensemble des valeurs propres de $A_n(0,1)$ est $\left\{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) ; j \in [\![1,n]\!]\right\}$. Déterminer la multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Considérons $j \in [\![1,n]\!]$ et posons $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$.

8. Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que x est un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$ si et seulement si :
$$\left\{\begin{array}{rcl} -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 & = & 0 \\ \forall k \in [\![2,n-1]\!],\ x_{k-1} - 2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} & = & 0 \\ x_{n-1} - 2\cos(\theta_j)x_n & = & 0 \end{array}\right. .$$

Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence:
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} = 0.$$

9. Déterminer l'ensemble des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ telles que $u_0 = u_{n+1} = 0$.

10. En déduire l'espace propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$.

11. En déduire, pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des valeurs propres de $A_n(\alpha,\beta)$ et les espaces propres associés. On distinguera le cas $\beta \neq 0$ du cas $\beta = 0$.

Partie II – Matrices par blocs

On considère A, B, C et D des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que C et D commutent.

12. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$.

L'objectif des trois prochaines questions est de démontrer la relation :
$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD - BC). \tag{1}$$

13. Montrer l'égalité (1) dans le cas où D est inversible.

14. On ne suppose plus D inversible. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$, la matrice $D + \dfrac{1}{p} I_n$ soit inversible.

15. En déduire que l'égalité (1) est également vraie dans le cas où D n'est pas inversible.
On admettra que les fonctions $f : x \mapsto$ *det*$\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D + xI_n \end{pmatrix}\right)$ *et* $g : x \mapsto \det(A(D + xI_n) - BC)$ *sont continues en* 0.

Considérons une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et formons la matrice :

$$N = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix}.$$

16. Montrer que $\mathrm{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbb{C}\,;\, \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M)\}$.

17. Soient $\mu \in \mathrm{Sp}(N)$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de M associé à la valeur propre μ^2.
Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ est vecteur propre de N associé à la valeur propre μ.

18. Montrer que si M est diagonalisable et inversible, alors N est également diagonalisable et inversible.

Problème 2 : Deux démonstrations du théorème de Cayley-Hamilton (niveau 2)

Méthode 1 : par les matrices compagnons (version endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n non nulle. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Q1 Dans cette question uniquement, on suppose que x est un vecteur de E tel que la famille $\mathscr{B} = \big(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\big)$ est une base de E.

a) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

b) Calculer le polynôme caractéristique de f.

c) En déduire $\chi_f(f)(x)$.

Q2 On revient au cas général, en supposant que x est un vecteur quelconque de E non nul.

a) Montrer qu'il existe un entier k compris entre 1 et n tel que $\mathscr{F} = \big(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\big)$ est libre et $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est stable par f.

b) Justifier qu'il existe une base $\mathscr{B} = \big(e_0, \dots, e_{n-1}\big)$ de E telle que pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $e_j = f^j(x)$ et déterminer la matrice de f dans cette base.

c) Montrer que $\chi_f(f)(x) = 0_E$.

Q3 Conclure.

Méthode 2 : par trigonalisation (version matricielle)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On voit A comme une matrice à cœfficients complexes et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A.

Q4 Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les cœfficients diagonaux de T.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $P_k = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$.

Q5 Donner l'expression de χ_A en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Q6 Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e_1)$, $P_1(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Q7 Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose $\mathscr{P}(k) :\ \forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k),\ P_k(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, $P_{k+1}(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

b) Montrer que $(u - \lambda_{k+1}\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1}) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

c) En déduire que $P_{k+1}(u)(e_{k+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

d) En déduire $\mathscr{P}(k+1) :\ \forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}),\ P_{k+1}(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Q8 Conclure.