Fonctions usuelles, trigonométrie, matrices et complexe
DS3 - durée : 3h

Exercice 1 : Echauffement : proche TD

1. a) Déterminez les racines carrés complexes du nombre $u = -3 - 4i$
   b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$$
2. Résoudre les équations et inéquations trigonométriques ci dessous :
$$(E_1): \quad \cos(3x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (E_2): \quad \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) \leq 1$$

1. a) On cherche $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $z^2 = -3 - 4i$
   On a alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy = -3 - 4i$ d'une part, et comme $|z^2| = |z|^2 = |u|$, on en déduit que $x^2 + y^2 = \sqrt{(-3)^2 + (-4^2)} = 5$
   D'où :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = 5 \\ x^2 - y^2 & = -3 \\ 2xy & = -4 \end{cases}$$
   $L_1 + L2$ donne $2x^2 = 2$ d'où $x^2 = 1$, donc $x = 1$ ou $x = -1$
   $L1 - L_2$ donne $2y^2 = 8$, d'où $y = 2$ ou $y = -2$.
   Comme $xy < 0$, on a x et y de signe distinct, et finalement
$$\boxed{\text{les racines de } u \text{ sont } z_1 = 1 - 2i \text{ et } z_2 = -1 + 2i}$$
   b) C'est une équation algébrique de degré 2, dont le discriminant est
$$\Delta = (4i - 3)^2 - 4i(i - 5) = -3 - 4i$$
   Avec $\delta = 1 - 2i$ on a $\delta^2 = \Delta$ et donc l'équation admet deux solutions :
$$\begin{aligned} z &= \frac{3 - 4i + 1 - 2i}{2i} \\ &= \frac{2 - 3i}{i} \\ &= -3 - 2i \end{aligned}$$
   et
$$\begin{aligned} z &= \frac{3 - 4i - 1 + 2i}{2i} \\ &= \frac{1 - i}{i} \\ &= -1 - i \end{aligned}$$
2. L'utilisation du cercle trigonométrique est fortement conseillée pour se repérer :
$$\begin{aligned} (E_1): \quad \cos(3x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$
   Pour l'inégalité, on commence par transformer l'expression avant de se ramener à une inéquation simple.

$$(E_2): \quad \cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)\leq 1 \Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\cos(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)\right)\leq 1$$
$$\Leftrightarrow \cos(x+\frac{\pi}{3})\leq \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, \frac{\pi}{3}+2k\pi\leq x+\frac{\pi}{3}\leq\frac{5\pi}{3}+2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, 2k\pi\leq x\leq\frac{4\pi}{3}+2k\pi$$

Exercice 2 :

Soit la matrice M définie par

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

1. Déterminez une matrice diagonale D et une matrice nilpotente N tels que $M=D+N$.
2. En déduire M^n pour tout $n\in\mathbb{N}$. On en donnera une forme la plus simple possible.

1. En posant $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=-I_3$, on a $M=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+D$.

   En notant $N=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, on observe que $N^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ et finalement $N^3=O_3$.

   Par récurrence, on a immédiatement que pour tout $n\geq 3$, $N^n=O_3$: il s'agit bien d'une matrice nilpotente.
2. Remarquons déjà que $ND=N(-I_3)=-N=-I_3N=DN$, donc on peut appliquer le binôme de Newton.

   Ainsi
$$\begin{aligned}M^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^kD^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}N^k(-I_3)^{n-k}+O_3\\&=(-1)^nN^0+n(-1)^{n-1}N+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}N^2\end{aligned}$$
$$M^n=\begin{pmatrix}(-1)^n & (-1)^{n-1}2n & (-1)^nn+(-1)^{n-2}2n(n-1)\\ 0 & (-1)^n & (-1)^{n-1}2n\\ 0 & 0 & (-1)^n\end{pmatrix}$$

   Et comme $(-1)^nn+(-1)^{n-2}2n(n-1)=(-1)^nn(1+2(n-1))=(-1)^nn(2n-1)$
$$M^n=(-1)^n\begin{pmatrix}1 & -2n & n(2n-1)\\ 0 & 1 & -2n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

1. Montrez que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
   On note argsh la bijection réciproque de sh.
2. Justifiez que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1$ et montrez que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}^2(\mathrm{argsh}(x))=1+x^2$$
3. On rappelle que si f^{-1} est dérivable en un point x, alors on a
$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$
   Justifiez que argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et précisez sa dérivée.
4. Soit φ définie par $\varphi(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
   a) Montrez que, $\forall x\in\mathbb{R}$, $x+\sqrt{x^2+1}>0$. En déduire que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Justifiez que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer φ'.
   c) En déduire une expression explicite de $\mathrm{argsh}(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
5. Proposez une autre technique pour obtenir la formule obtenue en 4c. On donnera juste les grandes étapes permettant ce calcul, sans le détailler outre mesure.

1. Comme sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x) \geq 1 > 0$, alors sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{sh}(\mathbb{R})$.
De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$: la continuité de sh garantit alors que $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Ainsi sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. On vérifie comme dans le DM que $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, et donc en remplaçant x par $\mathrm{argsh}(x)$, il vient $\mathrm{ch}^2(\mathrm{argsh}(x)) - \mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}(x)) = 1$.
Or $\mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}(x)) = x^2$, d'où
$$\mathrm{ch}^2(\mathrm{argsh}(x)) = 1 + x^2$$
3. La formule est rappelée, mais il faut quand même justifer pourquoi on peut l'appliquer ! Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $sh'(x) = \mathrm{ch}(x) \neq 0$, argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ également.
On a alors $\mathrm{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))}$
Or d'après la question précédente, $\mathrm{ch}^2(\mathrm{argsh}(x)) = 1 + x^2$. Comme $\mathrm{ch}(x) \geq 0$, on en déduit $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x)) = \sqrt{1 + x^2}$ et ainsi
$$\boxed{\mathrm{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}$$
Remarque : on a $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ et $\mathrm{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.... n'est-ce pas un peu magique quand même ?
4. a) Si $x \geq 0$, comme $\sqrt{x^2 + 1} > 0$, on a immédiatement $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et on va pouvoir élever au carré, qui est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:
$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 + 1} > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > -x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 > (-x)^2 \\ &\Leftrightarrow 1 > 0 \end{aligned}$$
Cette dernière égalité étant toujours vrai,et on a travaillé par équivalence, donc pour tout $x < 0$, on a également $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
Ainsi, pour tout $x > 0$, $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.
Comme ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit, par composition, que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
b) Par composition, sommes et à nouveau composition de fonctions dérivables, ϖ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}) \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \\ \varphi'(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \end{aligned}$$
c) On reconnait le résultat obtenu à la question 3 et donc $\varphi'(x) = \mathrm{argsh}'(x)$.
Ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \mathrm{argsh}(x) + C$.
Comme $\varphi(0) = 0$ et que $\mathrm{argsh}(0) = 0$ (puisque $\mathrm{sh}(0) = 0$), on en déduit que $C = 0$ et donc
$$\boxed{\mathrm{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})}$$
5. On aurait pu résoudre, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $sh(x) = y$
on a alors $e^x - e^{-x} = 2y$ et en posant $X = e^{-x}$ on résout l'équation $X - \dfrac{1}{X} = 2y$, qui équivaut à $X^2 - 2yX - 1 = 0$
Le discriminant vaut $4(y^2 + 1)$ et les X possibles sont $X = y + \sqrt{y^2 + 1}$ et $X = y - \sqrt{y^2 + 1}$.
On peut montrer comme on l'a fait plus haut que la première racine est négative, et on en déduit, puisque le produit vaut -1, que l'autre est positive.
Ainsi $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$, ce qui nous donne l'expression de argsh.

Exercice 4 : Une matrice... et des suites !

Partie 1 : puissance n-ième d'une matrice

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. Calculez $P^2 - 4P$. En déduire que P est inversible et précisez P^{-1}
2. Calculez $D = P^{-1}AP$. En déduire D^n pour tout $n \geq 0$.
3. Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Partie 2 : Suites à partir d'une matrice

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \text{ et pour tout } n \geq 0 \quad \begin{cases} u_{n+1} & = -u_n - 2v_n \\ v_{n+1} & = 3u_n + 4v_n \end{cases}$$

1. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Déterminez une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$X_{n+1} = MX_n$$
2. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}, X_n = M^n X_0$
3. En déduire les expressions explicites de u_n et v_n.

Partie 1 :

1. Le calcul donne $P^2 - 4P = -I_2$, donc $P(P - 4I_2) = -I_2$, ou encore
$$P(4I_2 - P) = I_2$$
Comme P est une matrice carré, ce résultat suffit pour en déduire que P est inversible, avec $P^{-1} = 4I_2 - P$, c'est à dire
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. On trouve $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. D est diagonale, donc $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$
3. Soit P_n la proposition $A^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation :
Pour $n = 0$, on a $P^{-1}D^0P = PP^{-1} = I_3 = A^0$, donc l'initialisation est validée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie, c'est à dire que $A^n = P^{-1}D^nP$.
Alors $A^{n+1} = AA^n = AP^{-1}D^nP$.

Or $D = PAP^{-1}$, donc $P^{-1}DP = P^{-1}PAP^{-1}P = A$, et ainsi
$$\begin{aligned} A^{n+1} &= P^{-1}DPP^{-1}D^nP \\ &= P^{-1}DD^nP \\ A^{n+1} &= P^{-1}D^{n+1}P \end{aligned}$$
On a bien obtenu P_{n+1}
conclusion : par le principe de récurrence $\boxed{n \in \mathbb{N},\ A^n = P^{-1}D^nP.}$
4. C'est un calcul à mener soigneusement pour ne pas faire de bêtise, et on trouve
$$A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3(2^n - 1) & -2 + 3.2^n \end{pmatrix}$$

partie 2 :

1. Si on pose $M = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, c'est à dire A, on obtient bien :
$$MX_n = M\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_n - 2v_n \\ 3u_n + 4v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$
2. c'est une récurrence assez simple :
Pour $n = 0$, on $M^0 = I_2$, donc $I_2X_0 = X_0$ et on a bien $X_0 = M^0X_0$
Soit $n \geq 0$. On suppose que $X_n = M^nX_0$.

Or $X_{n+1} = MX_n$, donc par hypothèse de récurrence,

$$X_{n+1} = MM^nX_0 = M^{n+1}X_0$$

ce qui confirme l'hérédité.
Conclusion : par le principe de récurrence, la proposition est vérifiée.

3. On a calculé A^n à la fin de la première partie. Il reste juste à remplacer

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2^{n+1} & 2-2^{n+1} \\ 3(2^n-1) & -2+3.2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

d'où $\boxed{u_n = 7 - 3 \times 2^{n+1} \text{ et } v_n = 9.2^n - 7}$

Exercice 5 :

En admettant certains résultats de cet exercice, il reste accessible à tous

On considère la fonction f ci dessous :

$$f : x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$$

On se propose de l'étudier et d'en faire un tracé approximatif.

1. Soient $P_1(x) = 4x^3 - 3x - 1$ et $P_2(x) = 4x^3 - 3x + 1$
   a) Exprimez ces polynômes comme produit de polynômes de degré 1.
   b) Montrez que l'ensemble de définition de f est $[-1; 1]$
2. Justifiez que f est dérivable sur $]-1,1[\setminus\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$, calculez f' et donnez le tableau de variation de f.
3. a) Montrez que pour tout $x \in [-1; 1]$
   $$\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$$
   b) En déduire que pour tout $x \in [-1; 1]$,
   $$f(-x) = \pi - f(x)$$
   c) Qu'est-ce que cela implique comme propriété géométrique sur la courbe de f, entre la partie tracée sur $[0; 1]$ et celle sur $[-1 \; ; \; 0]$?
4. a) Montrez que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\cos(\theta)) = \arccos(\cos(3\theta))$
   b) En déduire une expression simple de $f(\cos(\theta))$ pour $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. (on distinguera $\theta \leq \frac{\pi}{3}$ et $\theta \geq \frac{\pi}{3}$)
5. Déduire de la question 4 une expression de $f(x)$ en fonction de $\arccos(x)$ pour $x \in \left]\frac{1}{2}\;;1\right]$, puis pour $x \in \left[0\;;\frac{1}{2}\right]$.
6. Tracer approximativement la courbe de f.

1. a) On observe que $P_(1) = 0$ donc on peut factoriser par $(x-1)$ ce qui donne

   $$P_1(x) = (x-1)(4x^2+4x+1) = (x-1)(2x+1)^2$$

   De même, $P_2(-1) = 0$ et en factorisant par $(x+1)$ il vient

   $$P_2(x) = (x+1)(4x^2-4x+1) = (x+1)(2x-1)^2$$

   b) La fonction arccos étant définie sur $[-1; 1]$ on cherche x tel que $4x^3 - 3x \in [-1; 1]$, c'est à dire

   $$-1 \leq 4x^3 - 3x \leq 1$$

   Ainsi, $f(x)$ est définie si et seulement si $-1 \leq 4x^3 - 3x$ et $4x^3 - 3x \leq 1$, c'est à dire si et seulement si
   $4x^3 - 3x + 1 \geq 0$ et $4x^3 - 3x - 1 \leq 0$.
   On retrouve P_1 et P_2, dont le signe est respectivement donné par $(x-1)$ et $(x+1)$, puisque $(2x-1)^2 \geq 0$
   Ainsi,

   $$\begin{aligned} f(x) \text{ est défini } &\Leftrightarrow P_2(x) \geq 0 \text{ et } P_1(x) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x+1 \geq 0 \text{ et } x-1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq -1 \text{ et } x \leq 1 \\ f(x) \text{ est défini } &\Leftrightarrow x \in [-1; 1] \end{aligned}$$

2. On sait que arccos est dérivable sur $]-1; 1[$. Or $4x^3 - 2x = 1 \Leftrightarrow P_1(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ou } x = -\frac{1}{2}$ (grace à la factorisation obtenue à la question $1a$)
   De même, $4x^3 - 2x = -1 \Leftrightarrow P_2(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou} x = \frac{1}{2}$
   Ainsi, pour tout $x \in]-1; 1[\setminus\{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$, $4x^3 - 2x \notin \{-1; 1\}$, donc par composition de fonction dérivable, f est dérivable sur cet ensemble.

On a alors

$$f'(x) = \frac{-12x^2+3}{\sqrt{1-(4x^3-3x)^2}}$$

$f'(x)$ est du signe de $-12x^2+3$, dont les racines sont $x = \frac{1}{2}$ et $x = -\frac{1}{2}$, ce qui donne le tableau ci dessous :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	$\|$
f	π	$\searrow$	0	$\nearrow$	π	$\searrow$	0

3. a) Plusieurs façon de faire. Le plus facile est probablement en dérivant : si on pose $g(x) = \arccos(x)+\arccos(-x)$, g est dérivable sur $]-1,1[$ avec $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = 0$.
Ainsi, g est constante sur $[-1,1]$ (les bornes redevienne fermée... on verra ça en détail plus tard dans l'année)
Comme $g(0) = \arccos(0) + \arccos(0) = 2\frac{\pi}{2} = \pi$ on obtient $g(x) = \pi$, c'est à dire

$$\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$$

b) Il suffit d'exploiter la relation précédente :

$$f(-x) = \arccos(-4x^3+3x) = \arccos(-(4x^3-3x)) = \pi - \arccos(4x^3-3x) = \pi - f(x)$$

c) Il s'agit ici d'avoir une bonne compréhension des opérations sur les fonctions. Le fait d'ajouter π décale la courbe de "π" vers le haut, et le $-f(x)$ "renverse" la courbe de f, comme dans le cas de l'imparité. C'est donc une sorte d'imparité "décalée" vers le haut !
Comme $f(0) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$, on doit pouvoir montrer que $f - \frac{\pi}{2}$ est impaire.
Plus précisément : posons $h(x) = f(x) - \frac{\pi}{2}$
On a alors

$$h(-x) = f(-x) - \frac{\pi}{2} = \pi - f(x) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - f(x) = -h(x)$$

Ainsi, h est impaire.
La courbe de h est donc symétrique par rapport au centre du repère, et donc celle de f est symétrique par rapport au point de coordonnée $(0, \frac{\pi}{2})$.

4. a) il s'agit ici de montrer que $\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$. Ceci peut se faire en enchainant les formules de sommes : d'abord $\cos(3\theta) = \cos(2\theta+\theta)$, puis dans la formule obtenue, utiliser les duplications d'angle pour $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$. Enfin, en remplaçant $\sin^2(\theta)$ par $1-\cos^2(\theta)$, on arrive à la formule voulue.
L'autre technique consiste à utiliser les nombres complexes sous forme trigonométrique comme on vient de le voir en cours, car $\cos(3\theta) = Re(e^{i3\theta})$. Or :

$$\begin{aligned} e^{i3\theta} &= (e^{i\theta})^3 \quad \text{(Moivre)} \\ &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 \quad \text{(Euler)} \\ &= \cos^3(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - i\sin^3(\theta) \end{aligned}$$

En ne conservant que la partie réelle et en remplaçant $\sin^2(\theta)$ par $1-\cos^2(\theta)$ on a bien

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)$$

et en appliquant arccos :

$$\arccos(\cos(3\theta)) = f(\cos(\theta))$$

b) Si $\theta \in [0;\pi/3]$, alors $3\theta \in [0;\pi]$, donc $\boxed{f(cos(\theta)) = \arccos(\cos(3\theta)) = 3\theta}$

Si $\theta \in [\pi/3;\pi/2]$, alors $3\theta \in [pi;3\pi/2]$: il faut se repérer sur le cercle pour retrouver l'angle de $[0,\pi]$ correspondant à cela : nous sommes dans le quart inférieur gauche, et il faut se ramener à $[0;\pi]$, Or $2\pi - 3\theta \in [0;\pi]$ et $\cos(3\theta) = \cos(-3\theta) = \cos(2\pi - 3\theta)$

Ainsi, $\boxed{f(\theta) = \arccos(2\pi - 3\theta) = 2\pi - 3\theta}$

5. Pour $x \in \left]\frac{1}{2} ; 1\right]$, il existe $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$ tel que $x = \cos(\theta)$.

   Ainsi, $f(x) = 3\cos(\theta)$, c'est à dire $f(x) = 3\arccos(x)$

   puis pour $x \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$, on a cette fois $\theta \in [\pi/3, \pi/2]$ tel que $x = \cos(\theta)$, et donc $f(x) = 2\pi - 3\cos(\theta)$, c'est à dire $f(x) = 2\pi - 3\arccos(x)$

6. En fait, notre fonction est constituée de morceaux de arccos, qui sont retourné et étirés ($\times 3$). Le tracé n'est pas évident du tout. Voici un aperçu obtenu sous python :