

6 Ballon sonde et stabilité On s'intéresse pour commencer à l'atmosphère terrestre. On considère l'air comme un gaz parfait diatomique de masse molaire M , et de température uniforme T_0 . Le champ de pesanteur, $\vec{g}$, est uniforme dans toute la zone de l'atmosphère étudiée. On travaille dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, et on note (Oz) l'axe vertical ascendant.

1°) En l'absence de tout vent, quelle est l'équation locale vectorielle, faisant intervenir la pression, que l'on peut écrire en tout point de l'atmosphère étudiée ?

2°) Etablir la relation donnant la pression P en fonction de l'altitude z ; on introduira le "facteur d'échelle", que l'on notera H .

3°) Etablir de même la relation donnant la masse volumique μ en fonction de l'altitude z .

4°) On considère un ballon sonde, de masse totale $m_b = 500$ g, considéré indéformable. Son volume total, $V_b = 500$ L, est donc invariable. Montrer qu'il existe une altitude d'équilibre z_{eq} pour ce ballon sonde. L'évaluer numériquement.

5°) Etudier qualitativement la stabilité de cet équilibre vertical.

6°) On étudie à présent les petits mouvements verticaux du ballon sonde autour de la position d'équilibre : on pose $z = z_{eq} + h$, avec $|h| \ll z_{eq}$. Déterminer la pulsation des petites oscillations.

Solution :

1. La relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit, dans le référentiel terrestre : $\vec{\text{grad}} P = \mu \vec{g}$ en notant μ la masse volumique de l'air. Et avec le modèle du gaz parfait, l'équation d'état conduit à $\mu = \frac{PM}{RT_0}$. D'où $\vec{\text{grad}} P = \frac{PM}{RT_0} \vec{g}$.

2. En projetant sur les axes (Ox) et (Oy) , horizontaux, on obtient $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$, donc P ne dépend que de z .

En projetant sur l'axe (Oz) imposé vertical ascendant, $\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT_0} P$. On introduit le facteur d'échelle $H = \frac{RT_0}{Mg}$, d'où $\frac{dP}{P} = -\frac{dz}{H}$, qui s'intègre en : $P(z) = P(0) \exp(-z/H)$.

3. L'équation $\mu = \frac{PM}{RT_0}$ conduit à $\mu(z) = \mu(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$, avec $\mu(0) = \frac{P(0)M}{RT_0}$.

4. On isole le ballon sonde, dans le référentiel terrestre, supposé galiléen ; le théorème de la résultante dynamique s'écrit, en projection selon $\vec{e}_z$: $m_b \frac{d^2 z}{dt^2} = -m_b g + \mu(z) V_b g$.

L'équilibre z_{eq} correspond à $m_b = \mu(z_{eq}) V_b$, d'où $\frac{m_b}{V_b} = \mu(0) \exp\left(-\frac{z_{eq}}{H}\right)$.

Puis $z_{eq} = H \ln\left(\frac{\mu(0) V_b}{m_b}\right) = \frac{RT_0}{Mg} \ln\left(\frac{P(0) M V_b}{m_b R T_0}\right)$. Pour $T_0 = 273$ K, $M = 29$ g·mol⁻¹, $P(0) = 1$ bar, on trouve $z_{eq} \approx 2$ km. Le résultat dépend sensiblement de la température : pour 300 K, on trouve 1,3 km.

5. Cet équilibre est stable. En effet,

si une perturbation fait augmenter z , la masse volumique de l'air diminue, donc la poussée d'Archimède aussi, et elle devient inférieure au poids : le ballon redescend.

si une perturbation fait diminuer z , la masse volumique de l'air augmente, donc la poussée d'Archimède aussi, et elle devient supérieure au poids : le ballon remonte.

6. On isole le ballon sonde, dans le référentiel terrestre, supposé galiléen ; le théorème de la résultante dynamique s'écrit, en projection selon $\vec{e}_z$: $m_b \frac{d^2 z}{dt^2} = -m_b g + \mu(z) V_b g$.

Et $z = z_{eq} + h$, donc $\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d^2 h}{dt^2}$ et $m_b \frac{d^2 h}{dt^2} = -m_b g + \mu(0) V_b g \exp\left(-\frac{z_{eq} + h}{H}\right)$.

Soit $m_b \frac{d^2 h}{dt^2} = -m_b g + \mu(0) V_b g \exp\left(-\frac{z_{eq}}{H}\right) \exp\left(-\frac{h}{H}\right)$.

Puis, en remplaçant $\mu(0) \exp\left(-\frac{z_{eq}}{H}\right) V_b$ par m_b , grâce à l'équation de l'équilibre : $m_b \frac{d^2 h}{dt^2} = -m_b g + m_b g \exp\left(-\frac{h}{H}\right)$, c'est-à-dire $\frac{d^2 h}{dt^2} = g \left(-1 + \exp\left(-\frac{h}{H}\right)\right)$.

Un développement limité à l'ordre 1 de l'exponentielle donne alors : $\frac{d^2 h}{dt^2} + g \frac{h}{H} = 0$.

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique, avec pour pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{H}} = g \sqrt{\frac{M}{RT_0}}$.

On peut aussi passer par l'énergie.