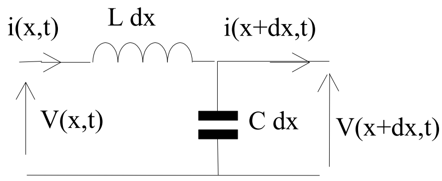
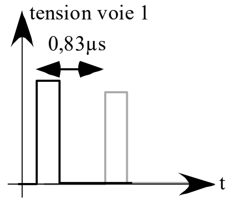
3 Un câble coaxial de L = 100 m de long est branché, en $x=-L$ sur un générateur d'impulsions. L'autre extrémité du câble, en $x = 0$, est en sortie ouverte.



1. On adopte le modèle de câble ci-contre :
   a- Déterminer l'équation de propagation vérifiée par i, puis par V.
   b- En déduire l'expression littérale de la célérité.
   c- Si le générateur envoie une impulsion en $x=-L$, l'impulsion qui arrive en $x = 0$, devrait-elle être (avec ce modèle) atténuée ? déformée ?
   d- On place un oscilloscope à la sortie du générateur (donc à l'entrée du câble). On y observe l'image ci-contre : Déterminer la vitesse de propagation de l'onde. Que verrait-on à l'oscilloscope si on court-circuitait le câble en sortie ?
2. Le modèle utilisé à la question 1 convient-il ? Sinon comment l'améliorer ?



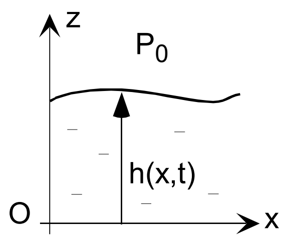
Solution

1.
   a- Cf cours $\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$
   b- Avec $c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
   c- Avec le modèle adopté (et les équations trouvées ci-dessus), on ne devrait pas avoir d'atténuation ni de déformation car l'équation de propagation obtenue est celle de d'Alembert, et elle assure une propagation de l'onde sans absorption et sans dispersion. On aurait aussi pu dire qu'il n'y a pas de résistance dans le schéma électrique, donc pas de dissipation.
   d- On voit que l'impulsion de tension fait un aller-retour en $\Delta t = 0{,}83\ \mu s$. On peut donc écrire $c = \frac{2L}{\Delta t}$. Numériquement, on trouve $c = 2{,}4 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Si on court-circuitait le câble en sortie, la seconde impulsion serait négative.
2. Le modèle utilisé à la question 1 ne convient pas car l'onde réfléchie est un peu plus petite que l'onde incidente, il y a eu une légère absorption. Pour améliorer le modèle, il faudrait ajouter une résistance dans le schéma de la tranche dx de câble.

---

6 Canal à surface libre

On considère un canal rempli d'eau, liquide incompressible de masse volumique µ. Le fond du canal est dans un plan horizontal. Au repos, la hauteur de l'eau est uniforme et de valeur H_0. La pression dans l'air au-dessus du canal est considérée uniforme, de valeur P_0. On cherche à mettre en équation les ondes de gravité (vagues) qui se propagent dans le canal. On ne tient pas compte des forces de tension superficielle, ni des forces de viscosité. L'écoulement dû aux vagues est considéré comme une petite perturbation par rapport à la situation de repos. Son champ des vitesses est approximé par $\vec{v} = v(x,t)\vec{e}_x$. En raison des vagues, la hauteur d'eau devient une fonction h(x,t), avec $|h-H_0| \ll H_0$. Le champ de pesanteur est uniforme : $\vec{g} = -g_0\vec{e}_z$.



1°) On admet que, dans le cadre de cet exercice, l'accélération d'une particule de fluide peut s'écrire $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$. Appliquer le PFD à une particule de fluide en l'assimilant à un point matériel.

2°) Par projections de l'équation, puis en primitivant, établir l'expression de la pression P(x,z,t) en fonction de P_0, z, g, µ et h(x,t).

3°) Montrer que $\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial x} = 0$.

4°) Le canal a une largeur L. Grâce à un bilan de masse (ou de volume) pour une tranche dx, établir que $\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hv)}{\partial x} = 0$.

On pose $h(x,t) = H_0 + h_1(x,t)$, avec $|h_1| \ll H_0$. Montrer qu'au prix d'une approximation qui se justifie avec les ordres de grandeur, on obtient une équation aux dérivées partielles reliant la dérivée temporelle de h_1 à la dérivée spatiale de v. Puis montrer que h_1 obéit à une équation de propagation de d'Alembert 1D.

5°) Calculer la célérité en km/h pour H_0 = 3 km. Estimer la période temporelle pour un tsunami de longueur d'onde 150 km.

Solution

On s'intéresse aux ondes de gravité dans un canal à surface libre, c'est-à-dire dont la surface supérieure est en permanence en contact avec l'atmosphère, dont la pression est considérée uniforme et stationnaire : $P_{atm} = P_0 = C^{te}$. On considère pour cela un écoulement dont le champ des vitesses est donné par $\vec{v} = v(x,t)\,\vec{e}_x$. Le champ de pesanteur est uniforme : $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. L'eau, présente dans le canal, est supposée incompressible, de masse volumique μ.

1. $\mu \mathrm{d}\tau\, \vec{a} = -\mu \mathrm{d}\tau\, g\overrightarrow{e_z} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P \mathrm{d}\tau$, que l'on simplifie en $\mu \dfrac{\partial v}{\partial t}\overrightarrow{e_x} = -\mu g \overrightarrow{e_z} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P$.

2. Grâce à la projection de cette équation selon $\overrightarrow{e_y}$, on montre que P ne dépend pas de y, puis en projetant selon $\overrightarrow{e_z}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = -\mu g$, d'où $P(x,z,t) = -\mu g z + f_1(x,t)$. Et puisque la surface du canal est "libre", $P(x, h(x,t), t) = P_0$, ce qui permet de trouver la fonction $f_1(x,t) = P_0 + \mu g h(x,t)$.

Finalement, $P(x,z,t) = \mu g\,(h(x,t) - z) + P_0$.

3. Grâce à la projection selon $\overrightarrow{e_x}$, $\mu \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial x} = -\mu g \dfrac{\partial h}{\partial x}$. Ce qui donne bien $\dfrac{\partial v}{\partial t} = -g\dfrac{\partial h}{\partial x}$.

4. La conservation de la masse peut s'écrire en faisant un bilan de masse sur une tranche $\mathrm{d}x$: $\mu L \mathrm{d}x h(x, t+\mathrm{d}t) = \mu L \mathrm{d}x h(x,t) + \mu v(x,t)\, L h(x,t)\,\mathrm{d}t - \mu v(x+\mathrm{d}x, t)\, L h(x+\mathrm{d}x, t)\,\mathrm{d}t$, d'où $\mathrm{d}x h(x,t+\mathrm{d}t) = \mathrm{d}x h(x,t) + v(x,t)\,h(x,t)\,\mathrm{d}t - v(x+\mathrm{d}x,t)\,h(x+\mathrm{d}x,t)\,\mathrm{d}t$, puis $\dfrac{h(x,t+\mathrm{d}t) - h(x,t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{v(x+\mathrm{d}x,t)\,h(x+\mathrm{d}x,t) - v(x,t)\,h(x,t)}{\mathrm{d}x}$, ou encore $\dfrac{\partial h}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial(hv)}{\mathrm{d}x}$.

5. On pose $h(x,t) = H_0 + h_1(x,t)$, avec $|h_1| \ll H_0$.

On remplace dans les équations de couplage : $\dfrac{\partial v}{\partial t} = -g\dfrac{\partial h_1}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial h_1}{\mathrm{d}t} = -H_0\dfrac{\partial v}{\mathrm{d}x} - v\dfrac{\partial h_1}{\mathrm{d}x} \simeq -H_0\dfrac{\partial v}{\mathrm{d}x}$.

Il vient $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -g\dfrac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = -H_0\dfrac{\partial^2 v}{\partial t \partial x}$.

En utilisant le théorème de Schwarz, on obtient $\dfrac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \dfrac{1}{gH_0}\dfrac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} = 0$, ce qui est bien une équation de propagation de d'Alembert, avec $c = \sqrt{gH_0}$.

6. Pour $H_0 = 3.0\,\mathrm{km}$, on trouve $c = 6 \times 10^2\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. On donne la longueur d'onde pour le Tsunami de 2004 : $\lambda = 150\,\mathrm{km}$. La période des vagues lors de cette catastrophe est donc de l'ordre de $T = \dfrac{\lambda}{c} = 9 \times 10^2$ s.