

Suites et séries de fonctions

Dans tout le chapitre \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , E et F sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et A est une partie de E . Les fonctions sont définies de A dans F . Le plus souvent, dans les exemples et exercices, A est l'intervalle de \mathbb{R} et F est \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I Convergence d'une suite de fonctions

I. A Convergence simple

Définition 1.1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F et $f : A \rightarrow F$.

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A lorsque pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge (dans F) vers $f(x)$.

Proposition 1.2 (Unicité de la limite)

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur A alors la limite simple est unique.

Remarque 1.3 :

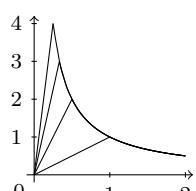
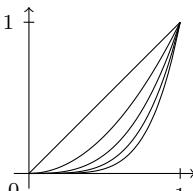
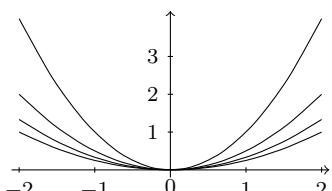
$$[(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers } f \text{ sur } A] \Leftrightarrow [\forall x \in A, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)]$$

Ainsi une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur A si et seulement si les suites $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ convergent pour tout x fixé dans A .

Exemples 1.4 : • sur \mathbb{R} , $f_n : x \mapsto \frac{x^2}{n}$;

• sur $[0; 1]$, $f_n : x \mapsto x^n$;

• sur $[0; +\infty[$, $f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in [0; \frac{1}{n}[; \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; +\infty[. \end{cases}$



I. B Convergence uniforme

Définition 1.5

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F et $f : A \rightarrow F$.

On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Remarques 1.6 : • On munit l'espace $\mathcal{B}(A, F)$ des fonctions bornées de A dans F de la norme : $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f(x)\|_F$.

Ainsi pour $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées et f une fonction bornée, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f si et seulement si elle converge vers f dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(A, F), \|\cdot\|_\infty)$.

C'est ce qui justifie le nom « norme de la convergence uniforme ».

- Dans le cas général, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A si et seulement si $(f_n - f)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée à partir d'un certain rang n_0 et $\|f_n - f\|_{\infty, A} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- Si B est une partie de A et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur B .

En effet pour tout $g \in \mathcal{B}(A, F)$, $\|g\|_{\infty, B} \leq \|g\|_{\infty, A}$.

Proposition 1.7

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F et $f : A \rightarrow F$.

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f .

Remarque 1.8 : La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

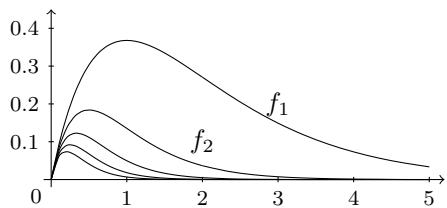
La réciproque est fausse.

Contre exemple 1.9 : Sur \mathbb{R} , $f_n : x \mapsto \frac{x^2}{n}$.

Méthode 1.10 (Démontrer une convergence uniforme)

1. On commence par déterminer un candidat pour la limite uniforme par convergence simple : on pose $\forall x \in A, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
2. On calcule : $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\|$.
Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on peut passer par une étude de fonction.
3. On montre que : $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exemple 1.11 : Sur \mathbb{R}^+ , $f_n : x \mapsto xe^{-nx}$.



Méthode 1.12 (Démontrer une convergence uniforme par majoration)

1. On commence par déterminer un candidat pour la limite uniforme par convergence simple : on pose $\forall x \in A, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
2. On majore : $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\|$ par un $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$.
C'est à dire : on majore $\|f_n(x) - f(x)\|$ par α_n qui ne dépend pas de x (uniformément).
3. On montre que : $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Exemple 1.13 : Sur \mathbb{R}^+ , $g_n : x \mapsto xe^{-nx} \cos(nx)$.

Méthode 1.14 (Infirmer une convergence uniforme)

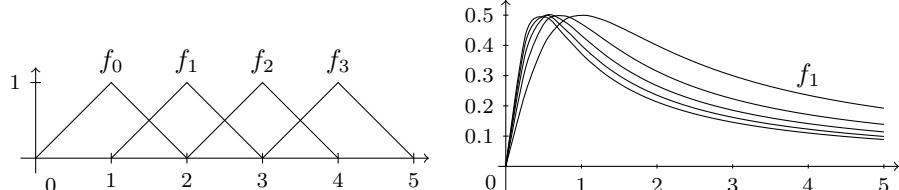
méthode 1 : utiliser une propriété des fonctions f_n non conservée par la fonction f (bornée, continue : à suivre).

méthode 2 : calculer $\mu_n = \|f_n - f\|_\infty$ et montrer que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

méthode 3 : trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

Exemples 1.15 : • Sur \mathbb{R}^+ , $f_n : x \mapsto \begin{cases} x - n & \text{si } x \in [n; n+1]; \\ n + 2 - x & \text{si } x \in]n+1; n+2]; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

• Sur \mathbb{R}^+ , $f_n : x \mapsto \frac{\sqrt{nx}}{1+nx^2}$.



I. C Limite uniforme d'une suite de fonctions bornées

Proposition 1.16

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est bornée de A dans F ;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f ;

Alors : f est bornée sur A .

Exemple 1.17 : Suite de l'exemple 1.4,

sur $[0; +\infty[$, $f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \in [0; \frac{1}{n}]; \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}; +\infty]. \end{cases}$

II Convergence uniforme et continuité

II. A Limite uniforme d'une suite de fonctions continues

Proposition 2.1

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en $a \in A$;
- il existe V un voisinage de a relativement à A tel que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur V vers f ;

Alors : f est continue en a .

Théorème 2.2

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur A ;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f ;

Alors : f est continue sur A .

Exemple 2.3 : Retour sur l'exemple 1.4 : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : x \mapsto x^n$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$? sur tout intervalle de la forme $[0; a]$ avec $0 < a < 1$? sur $[0; 1[$?

Théorème 2.4

Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans F . Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I ;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans I ;

Alors : f est continue sur I .

Remarque 2.5 : Pour vérifier la convergence uniforme sur tout segment de I , il suffit de vérifier la convergence uniforme sur tout intervalle d'une famille \mathcal{F} d'intervalles telle que tout segment est inclus dans un des intervalles de \mathcal{F} .

Exemple 2.6 : Si $I =]-1 ; 1[$, quelle famille d'intervalles peut-on considérer ?

II. B Théorème de la double limite

Théorème 2.7 (de la double limite)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A et a un point adhérent à A .

Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n admet une limite ℓ_n en a ;
- la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A ;

Alors :

- la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in F$;
- $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{} \ell$.

Remarques 2.8 : • On peut reformuler la conclusion du théorème en :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

d'où le nom du théorème.

- Si A est une partie de \mathbb{R} non majorée (par exemple si $A = [1 ; +\infty[$), alors le théorème s'applique en $a = +\infty$, et de même pour $-\infty$ si A est une partie de \mathbb{R} non minorée.

Exemple 2.9 : Toujours avec l'exemple 1.4 sur $[0 ; 1[$, $f_n : x \mapsto x^n$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n \right) = \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n \right) = \quad$$

donc la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

III Intégration d'une limite uniforme sur un segment

Théorème 3.1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{K} , a un point de I .

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I ;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f .

Alors la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur tout segment de I où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt \text{ et } F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt.$$

Corollaire 3.2

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un segment $[a ; b]$ et à valeurs dans \mathbb{K} .

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a ; b]$;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a ; b]$ vers une fonction f .

Alors f est continue sur $[a ; b]$ et :

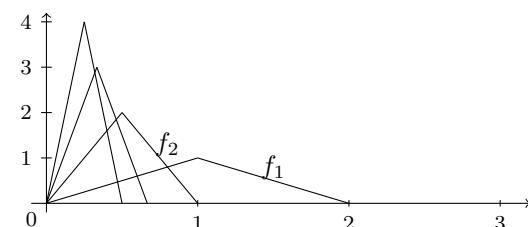
$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Exemple 3.3 : Suite de l'exemple 1.11 sur $[0 ; 1]$, $f_n : x \mapsto xe^{-nx}$.

Attention : La convergence simple ne suffit pas !

Contre exemple 3.4 : Sur $[0 ; 2]$, pour $n \geq 2$,

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} n^2 x & \text{si } x \leq \frac{1}{n} \\ n(2 - nx) & \text{si } x \in]\frac{1}{n} ; \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Corollaire 3.5

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}([a ; b], \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$.

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge aussi vers f pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Remarque 3.6 : À nouveau la réciproque est fausse, contre exemple : sur $[0; 1]$, $f_n : x \mapsto x^n$.

IV Dérivation d'une suite de fonctions

Théorème 4.1

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} . Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^1(I)$;
 - $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ;
 - $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur tout segment de I ;

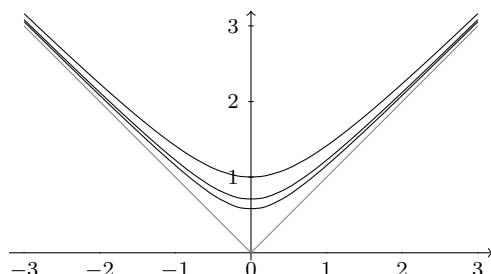
alors :

 - $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I ;
 - f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = g$.

Remarque 4.2 : En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur des intervalles adaptés à la situation.

Attention : La convergence uniforme doit être celle des dérivées !

Contre exemple 4.3 : Sur \mathbb{R} , pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.



Théorème 4.4 (généralisation à la classe \mathcal{C}^k)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} . Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{C}^k(I)$;
 - pour tout $j \in \llbracket 0 ; k-1 \rrbracket$, $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers g_j sur I ;
 - $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_k sur tout segment de I ;

alors :

 - $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_0 sur tout segment de I ;
 - g_0 est de classe \mathcal{C}^k sur I et pour tout $j \in \llbracket 0 ; k \rrbracket$, $g_0^{(j)} = g_j$.

V Convergence d'une série de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F .

On note : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ la **somme partielle** d'ordre n et la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la **série** de terme général f_n , notée $\sum f_n$.

On reprend ainsi le vocabulaire des séries vu dans le chapitre sur les séries numériques et vectorielles, mais on n'est pas dans le cadre de ce chapitre : il ne s'agit pas de séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. En effet, même si l'on choisit les fonctions f_n dans un espace que l'on munit d'une norme, ce sera souvent un espace de dimension infini comme $(\mathcal{C}([a ; b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

V. A Convergence simple, convergence uniforme

Définition 5.1

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F , on dit que la série $\sum f_n$ **converge simplement** sur A lorsque la suite des sommes partielles converge simplement sur A

On appelle alors **somme de la série** la limite des sommes partielles et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle reste d'ordre n : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n$.

Exemple 5.2 : Convergence simple et somme de la série $\sum xe^{-nx}$.

Définition 5.3

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F , on dit que la série $\sum f_n$ **converge uniformément** lorsque la suite des sommes partielles converge uniformément.

Remarque 5.4 : Une série de fonction étant une suite de fonctions, les résultats des parties précédentes s'appliquent aux séries de fonctions. En particulier :

- La convergence uniforme sur A implique la convergence simple sur A .
- La somme d'une série de fonctions bornées sur A qui converge uniformément sur A est bornée sur A .
- La somme d'une série de fonctions continues sur A qui converge uniformément sur A (ou sur tout segment si A est un intervalle de \mathbb{R}) est continue sur A .

Théorème 5.5 (double limite)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur A et telle que chaque fonction f_n a une limite ℓ_n en $a \in \bar{A}$, alors $\sum \ell_n$ converge et :

$$S(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n.$$

Proposition 5.6

Une série de fonctions converge uniformément sur A si et seulement si elle converge simplement sur A et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0 sur A .

Proposition 5.7

Si $\sum f_n$ converge uniformément, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

Méthode 5.8 (Infirmer une convergence uniforme)

méthode 1 : utiliser une propriété des fonctions f_n non conservée par la fonction f (bornée, continue).

méthode 2 : trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

méthode 3 : trouver une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(R_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

Exemples 5.9 : • $\sum xe^{-nx}$ sur $[0; +\infty[$.

- $\sum z^n$ sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
- $\sum \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ sur $[0; 1]$.

V. B Convergence normale

Définition 5.10

Une série de fonction $\sum f_n$ sur A est dite **normalement convergente** sur A lorsque la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Remarque 5.11 : En particulier les fonctions f_n doivent être bornée sur A (pour que $\|f_n\|_\infty$ soit bien définie).

Méthode 5.12 (Démontrer une convergence normale)

1. On calcule $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in A} \|f_n(x)\|$.
2. On montre que la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Méthode 5.13 (Démontrer une convergence normale par majoration)

1. On majore $\|f_n\|$ sur A par $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$: $\forall x \in A, \|f_n(x)\| \leq \alpha_n$ (majoration uniforme : indépendante de $x \in A$).
2. On montrer que la série la série $\sum \alpha_n$ converge.

Méthode 5.14 (Infirmer une convergence normale)

méthode 1 : limite simple non continue (ou non bornée) d'une série de fonctions bornées (ou continues).

méthode 2 : par calcul ou minoration de $\|f_n\|_\infty$;

méthode 3 : trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\sum \|f_n(x_n)\|$ diverge.

Exemple 5.15 : Série $\sum f_n$ avec $f_n : \begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto z^n \end{cases}$ sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ puis sur $B_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ pour $0 < r < 1$.

V. C Convergence normale et convergence uniforme

Théorème 5.16

Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A , alors elle converge uniformément sur A .

Proposition 5.17

Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A , alors pour tout $x \in A$, la série $\sum f_n(x)$ converge absolument.

Remarque 5.18 : La convergence uniforme sur A n'implique pas la convergence normale sur A .

Contre exemple 5.19 : $\sum \frac{(-1)^n x^n}{2n+1}$ converge uniformément sur $[0; 1]$ d'après l'exemple 5.9, mais pas normalement sur $[0; 1]$ car pour $x = 1$ il n'y a pas convergence absolue.

V. D Intégration et dérivation d'une série de fonctions

Proposition 5.20

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{K} , a un point de I .

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I ;
- $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction S .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on pose :

$$F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt \text{ et } T : x \mapsto \int_a^x S(t) dt.$$

Alors la suite $\sum F_n$ converge uniformément vers T sur tout segment de I .

Exemple 5.21 : Convergence et somme de la série $\sum \frac{x^n}{n}$ sur $]-1; 1[$.

Proposition 5.22

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions sur un segment $[a; b]$ et à valeurs dans \mathbb{K} .

Si :

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a; b]$;
- $\sum f_n$ converge uniformément vers une fonction S sur $[a; b]$,

alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) = \int_a^b S(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt.$$

Proposition 5.23

Soit $\sum f_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{K} . Si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}^1(I)$;
- $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
- $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I ;

alors :

- $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I ;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Remarque 5.24 : De même pour la généralisation à la classe \mathcal{C}^k .

Exemple 5.25 : Convergence et somme de la série $\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sur $]-1; 1[$.

VI Approximation uniforme

VI. A par des fonctions en escalier

Rappel : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

- Une **subdivision** du segment $[a; b]$ est une famille finie $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ telle que $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$.
- Soit $f : [a; b] \rightarrow F$ une fonction. On dit qu'elle est **en escalier** s'il existe une subdivision (a_0, \dots, a_n) telle que pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ la fonction f est constante sur $]a_k; a_{k+1}[$. On dit alors que la subdivision est **adaptée** à f .
- Soit $f : [a; b] \rightarrow F$ une fonction. On dit qu'elle est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision (a_0, \dots, a_n) telle que pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ la fonction f est continue sur $]a_k; a_{k+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[a_k; a_{k+1}]$. On dit alors que la subdivision est **adaptée** à f .

Théorème 6.1

Toute fonction continue par morceaux sur $[a; b]$ à valeurs dans F est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a; b]$.

Lemme 6.2

Soit $f \in \mathcal{C}([a; b], F)$ et $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a; b], F)$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

Remarques 6.3 : • En notant $\mathcal{E}([a; b], F)$ l'espace vectoriel des fonctions en escalier sur $[a; b]$ et $\mathcal{C}_{pm}([a; b], F)$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a; b]$, $\mathcal{E}([a; b], F)$ est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}_{pm}([a; b], F), \|\cdot\|_\infty)$.

- Ce résultat permet la construction de l'intégrale de Riemann vue en première année.
- Dans l'EVN $(\mathcal{B}([a; b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $\overline{\mathcal{E}([a; b], \mathbb{R})} \neq \mathcal{C}_{pm}([a; b], \mathbb{R})$. En effet : $\sum 2^{-n} \mathbb{1}_{[0; 2^{-n}]}$ converge uniformément (car normalement) sur $[0; 1]$, mais sa somme a une infinité de points de discontinuité, elle n'est donc pas continue par morceaux.

VI. B par des polynômes

Théorème 6.4 (Weierstrass)

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$ est limite uniforme sur $[a; b]$ de fonctions polynomiales à coefficients dans \mathbb{K} .

Remarque 6.5 : L'espace $\mathbb{K}[X]$ des fonctions polynomiales à coefficients dans \mathbb{K} est dense dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$.

De plus, dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}([a; b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$, $\overline{\mathbb{K}[X]} = \mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$ puisqu'une limite uniforme sur $[a; b]$ de fonctions polynomiales est continue sur $[a; b]$.