✍ **Exercice 1 : Glissement d'un objet sur un plan incliné**

Soit un objet de centre d'inertie M et de masse m posé sur un plan incliné qui fait l'angle α avec l'horizontale. On note f_0 le cœfficient de frottement statique et f le cœfficient de frottement dynamique. On rappelle que d'après les lois de Coulomb sur le frottement solide, si on décompose la réaction du support $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ où $\vec{T}$ est la réaction tangentielle et $\vec{N}$ la réaction normale, $T < f_0 N$ au repos et $T = f.N$ lors du glissement.

1. Pour quelle valeur α_0 de α l'objet va-t-il commencer à glisser sur le plan incliné (mouvement de translation) ?
2. Étudier le mouvement ultérieur, $x(t)$ où x est le déplacement de l'objet sur le plan incliné.

✍ **Exercice 2 : Parabole de sûreté**

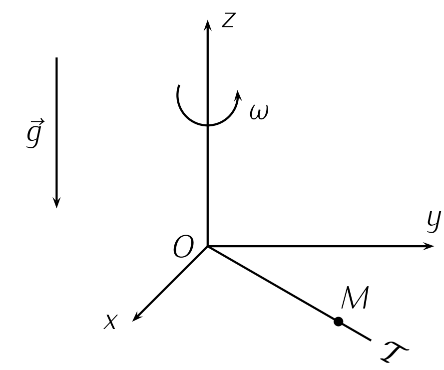
Une particule (projectile) est lancée depuis un point O pris pour origine des espaces et des temps. La vitesse initiale $\vec{v_0}$ fait avec l'horizontale de O un angle $\alpha > 0$.

1. Établir l'équation de la trajectoire.
2. Déterminer les coordonnées du sommet S et la portée OB, les dates T_S et t_B auxquels sont atteints les points S et B.
3. Montrer que l'ensemble des points de l'espace que l'on peut atteindre dans les conditions précédentes est située sous une courbe dont on établira une équation en $\tan\alpha$.

✍ **Exercice 3 : Coulissement sur une tige en rotation**

Une tige $\mathcal{T}$ horizontale passant par O tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω constante.
Un point matériel M de masse m peut coulisser sans frottement sur la tige. Il est repéré par ses coordonnées polaires (r,θ) dans le plan (Oxy).
À l'instant $t = 0$, le point M est abandonnée sans vitesse initiale par rapport à la tige à la distance r_0 de l'origine O ; on a donc

$$r(t=0) = r_0 \text{ et } \dot{r}(t=0) = 0$$



On suppose de plus qu'à ce même instant, la tige est confondue avec l'axe (Ox) : $\theta(t=0) = 0$.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique en projection dans la base cylindrique $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$.
2. En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $r(t)$.
3. Déterminer la loi horaire $r(t)$ en fonction de r_0 et ω. Tracer l'allure de $r(t)$ pour $t \geq 0$.
4. Reprendre la question précédente pour la trajectoire $r(\theta)$.

✍ **Exercice 4 : Bon à savoir ...**

Une voiture M de masse m suit une trajectoire rectiligne sur le sol horizontal à une vitesse constante $\vec{v_0} = v_0.\vec{e}_y$ jusqu'à l'instant $t = 0$ où le conducteur aperçoit un mur (!) infini (! !) perpendiculaire à $\vec{v_0}$ à la distance D. On suppose pour simplifier que seulement deux choix s'offrent au conducteur :

- soit il freine brutalement en bloquant les roues (la voiture n'a pas d'ABS) tout en gardant une trajectoire rectiligne.
- soit il tourne sans freiner et à la limite du dérapage sur une trajectoire circulaire pour essayer d'éviter le mur (considéré comme infini).

On supposera que la nature du contact des roues avec le sol est telle que dans les deux cas, la composante tangentielle de la force de frottement est proportionnelle (facteur f) à sa composante normale $T = f.N$ (loi de Coulomb sur les frottements). Quel est le meilleur choix ?

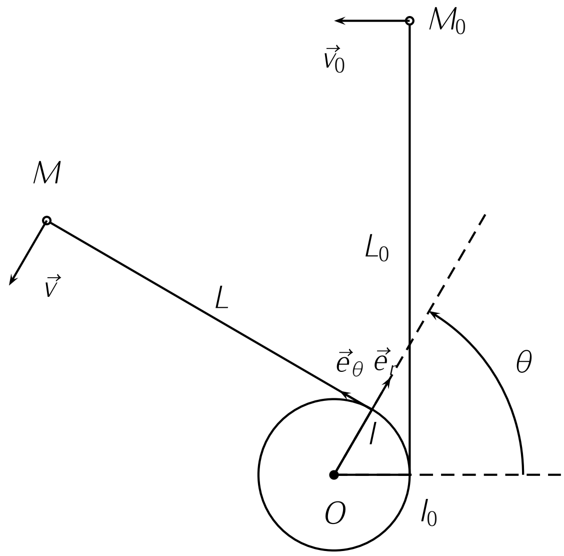
✍ Exercice 5 : Frottements quadratiques

Un solide modélisé par un point matériel M de masse $m = 20$ kg est lâché sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur uniforme.
L'air exerce sur lui une force de frottement opposée à la vitesse et de norme $f = \alpha v^2$ ($\alpha > 0$).

1. On constate que le solide atteint au bout d'un certain temps une vitesse limite constante $v_l = 45$ m.s^{-1}. Calculer α (on précisera bien son unité).
2. Au bout de combien de temps cette vitesse est-elle atteinte à 0,1 % près ?

On posera $u = v/v_l$ et on rappelle que $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{|1+u|}{|1-u|} + cte$.

✍ Exercice 6 : Enroulement d'un fil



Un cylindre d'axe vertical et de rayon R, repose sur un plan horizontal.
On attache en un point I_0 du cylindre un fil sans masse qui peut s'enrouler autour de la base du cylindre (cercle de centre O). La longueur du fil est constante et égale à L_0.
L'autre extrémité du fil est fixée à un point matériel M de masse m glissant sans frottement sur le plan horizontal.
Le point M est initialement en M_0 tel que le fil soit tendu et tangent à la base en I_0. On communique alors au point M une vitesse $\vec{v}_0$, horizontale et perpendiculaire à la droite (I_0M_0).
On suppose que le fil reste tendu au cours du mouvement et on note $L(t)$ la longueur de la partie IM non enroulée du fil à l'instant t.
On donne $R = 0{,}2$ m ; $L_0 = 0{,}5$ m ; $m = 0{,}04$ kg et $v_0 = 0{,}1$ m.s^{-1}.
On travaillera dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ définie par la position du point I (Cf. figure ci-contre).

1. Donner la relation entre L, L_0, R et l'angle θ repérant la position du point I.
2. Calculer $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, L_0, R et θ.
3. En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}$ du point matériel M à la date t, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
4. Montrer par utilisation du principe fondamental de la dynamique que $||\vec{v}|| = Cte$.
5. Déduire des questions 3. et 4. la relation entre $\dot{\theta}$, θ, L_0, R et v_0.
6. Exprimer θ en fonction de t, L_0, R et v_0.
7. Calculer t_f, la date à laquelle de fil est entièrement enroulé autour du cylindre.
   Faire l'application numérique.
8. Calculer la tension du fil T à la date t en fonction de t, m, L_0, R et v_0. Que se passe-t-il quand $t \to t_f$? Commenter.