Corrigé du EH 8

chapitre 7 exercice 10 : règle d'Abel

chapitre 7 exercice 5 (CCINP 5)

1. a) Cas $\alpha \leqslant 0$
$\forall\, n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant 1$ donc $(\ln n)^{\alpha} \leqslant 1$.
On en déduit que : $\forall\, n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.
Or $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n}$ diverge.
Donc , par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

b) Cas $\alpha > 0$
Soit $n \geqslant 3$.
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2, +\infty[$ donc $\forall k \in [\![3, n]\!]$, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k-1)$
donc $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k-1)$
C'est-à-dire, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$
f étant positive, on peut donc écrire dans $[0, +\infty]$ l'inégalité
$\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$
de sorte que la série et l'intégrale sont simultanément finies,
autrement dit, $\sum\limits_{n\geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.
Puisque $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}}$, on peut affirmer que : $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \iff$

$\alpha > 1$.
On en déduit que : $\sum\limits_{n\geqslant 2} f(n)$ converge $\iff \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.
Au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.
De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(n^2+n\right) = 2\ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 2\ln n + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
Donc $\ln\left(n^2+n\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln n$.
Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{8} \times \dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$.
Or, d'après 1.(b), $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$ converge.
Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge.