

I vibrations d'une corde de piano fixée à ses deux extrémités**I.A – mise en équation du mouvement transversal d'une corde de piano sans raideur****I.A.1)**

- corde sans raideur : les actions entre deux portions de corde adjacentes se réduisent aux forces de tension, tangentes à la corde au point de contact.
- dans l'hypothèse des petits mouvements, les déplacements de la corde par rapport à sa position d'équilibre sont suffisamment petits pour qu'à tout instant et en tout point l'angle entre la tangente à la corde mobile et la tangente à la corde à l'équilibre soit petit devant 1.

I.A.2)

On prend comme système le segment de corde situé, à l'équilibre, entre les abscisses x et $x + dx$. Sa masse et son accélération ont pour expressions $\delta m = \mu dx$; $\vec{a} = \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{e}_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y$. Il est soumis aux forces de tension $\vec{T}(x + dx, t)$ et $-\vec{T}(x, t)$ à ses deux extrémités, où $\vec{T} = T_x \vec{e}_x + T_y \vec{e}_y$. Les tensions \vec{T} sont donc des tensions de type + sur -.

Le théorème de la résultante dynamique appliqué au système, dans le référentiel du labo, galiléen, s'écrit $\mu dx \frac{\partial v_y}{\partial t} \vec{e}_y = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = \vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx$ En projetant sur l'axe y : $\mu \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$

En projetant sur l'axe x : $0 = \frac{\partial T_x}{\partial x}$ Ceci montre que la composante en x de la tension de la corde est la même tout le long de celle-ci. Elle est aussi égale au produit de la norme de la tension par le cosinus de l'angle d'inclinaison. Ce cosinus étant assimilable à 1 (à l'ordre 1), cela permet de dire que la norme de la force de tension est égale à T_0 , en tout point et à tout instant.

Pour une corde sans raideur, la tension en tout point est colinéaire à la corde. En assimilant la tangente de l'angle d'inclinaison à son sinus, $[T_y \approx T_0 \frac{\partial y}{\partial x}]$

puis en dérivant par rapport au temps : $\frac{\partial T_y}{\partial t} = T_0 \frac{\partial v_y}{\partial x}$

I.A.3)

On repart des équations $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$; $T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$ qui conduisent en éliminant T_y à l'équation de d'Alembert : $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$; $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ où c représente la célérité des ondes transversales sur la corde.

La propagation des ondes de tension et de courant dans des lignes bifilaires, des ondes sonores dans les solides, obéit à la même équation.

I.A.4)

On convertit la tension exprimée (improprement !) sous forme d'une masse équivalente $m = 85 \text{ kg}$ en tension

$$T_0 = mg \approx 0,85 \text{ kN} . \text{ Pour l'acier } \mu = s\rho = \frac{\pi d^2}{4} \rho = 7,4 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-1} . \text{ D'où } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{4mg}{\pi \rho d^2}} = 3,4 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$$

I.B – modes propres d'une corde de piano sans raideur, fixée aux deux extrémités. Position du marteau**I.B.1)**

Une onde stationnaire est une onde pour laquelle les dépendances spatiale et temporelle sont séparées : $s(x, t) = f(x) \cdot g(t)$ en notation réelle. C'est une onde qui ne se propage pas.

Le report de la forme précédente dans l'équation de d'Alembert conduit à l'équation $f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2} f(x)g''(t)$ soit, en utilisant la propriété de séparation des variables $\frac{f''}{f} = \frac{1}{c^2} \frac{g''}{g} = cste = K$. L'équation différentielle en f s'écrit $f'' - Kf = 0$ et admet pour solutions des fonctions harmoniques ($K < 0$), affines ($K = 0$) ou en cosinus et sinus hyperboliques ($K > 0$). Comme la corde est fixée à ses deux extrémités, à tout instant $y(0, t) = y(L, t) = 0$, soit $f(0) = f(L) = 0$, condition qui ne peut être vérifiée, si f n'est pas identiquement nulle, que par les solutions harmoniques : $f(x) = f_0 \cos(kx + \psi)$ où f_0 est une constante arbitraire, $k = \sqrt{-K}$ et ψ dépend des conditions aux limites.

L'équation différentielle en g s'écrit alors $\frac{g''}{g} = c^2 \frac{f''}{f} = -(kc)^2$; $g'' + (kc)^2 g = 0$ et admet pour solution générale $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$; $\omega = kc$ où g_0 est une constante arbitraire.

Les solutions de l'équation de d'Alembert en ondes stationnaires compatibles avec les conditions aux limites sont donc bien de la forme $y(x, t) = y_0 \cos(kx + \psi) \cos(\omega t + \varphi)$; $\omega = kc$

NB : on pouvait aussi, pour répondre à la question plus simplement, reporter la solution proposée dans l'équation de d'Alembert et vérifier que ça marchait.

I.B.2)

Les modes propres de la corde vibrante sont les ondes stationnaires purement sinusoïdales susceptibles d'exister sur la corde en l'absence d'excitation extérieure (régime libre). Les fréquences propres de la corde sont les fréquences de ses modes propres.

Les conditions aux limites de la corde s'écrivent $y(0, t) = y(L, t) = 0$ à tout instant, soit, comme le terme $y_0 \cos(\omega t + \varphi)$ n'est pas identiquement nul $\cos(\psi) = \cos(kL + \psi) = 0$

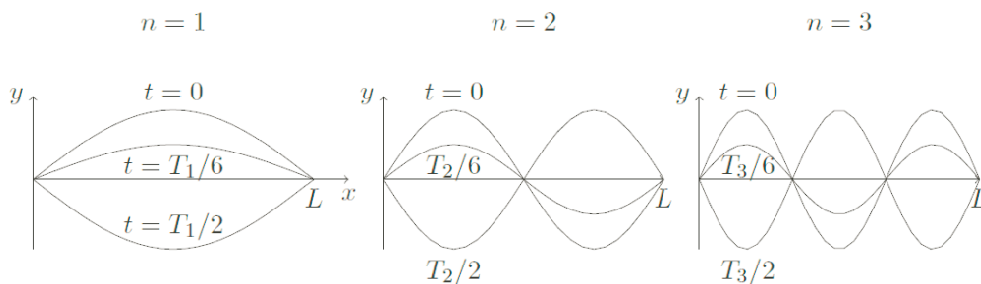
On en déduit : $\psi = \frac{\pi}{2}[\pi]$; $kL = n\pi$; $k_n = n\frac{\pi}{L}$ où n est un entier non nul. Les fréquences propres ont pour expression

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{k_n c}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$$

Si on choisit $\psi = -\pi/2$, $\cos(kx + \psi) = \sin(kx)$, et les modes propres sont de la forme

$$y_n(x, t) = y_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi n c t}{L} + \varphi\right)$$

à trois instants différents, l'allure de la corde pour les trois premiers modes est la suivante



I.B.3)

a) La largeur a du marteau intervient à la fois dans le coefficient qui se trouve devant la somme, et dans le premier sinus cardinal (on appelle sinus cardinal la fonction qui a x associe $\frac{\sin(x)}{x}$) qui intervient dans la somme : $\frac{\sin(n\pi a/L)}{n\pi a/L}$. Qualitativement, ce sinus cardinal prend des valeurs notables si $n\frac{\pi a}{L} < \pi$ et devient vite négligeable au-delà.

Le sinus cardinal a donc pour effet de limiter le rang n maximal des harmoniques présents dans la vibration de la corde à $n < n_{\max} = \frac{L}{a}$. En particulier, plus la taille du marteau est petite, plus le spectre est riche en harmoniques (mais moins l'amplitude de la vibration est importante, à cause du facteur se trouvant devant la somme). La fréquence caractéristique au-delà de laquelle les harmoniques ne sont pas excités par le marteau a pour expression

$$f = n f_1 = \frac{L}{a} f_1$$

correspondant à une longueur d'onde minimale

$$\lambda_{\min} = \frac{c}{f_{\max}} = \frac{ca}{L f_1} = 2a.$$

Qualitativement le marteau n'excite que les modes de longueurs d'onde supérieures à sa largeur.

Pour une corde de longueur $L = 65$ cm, de fréquence fondamentale $f_1 = 262$ Hz et un marteau de largeur $2a = 2$ cm

$$n_{\max} \approx 65 ; f_{\max} = 17 \text{ kHz}$$

Les modes non excités sont situés quasiment au-delà du spectre audible.

La taille des marteaux résulte d'un compromis :

- une augmentation de la taille du marteau conduit à une augmentation de l'amplitude des vibrations (y est proportionnel à a), donc à un son plus puissant
- une diminution de la taille de marteau permet d'augmenter le nombre de modes excités, donc favorise la richesse spectrale du son émis et sa qualité.

La taille du marteau indiquée correspond à ce compromis, car les modes excités couvrent pratiquement l'ensemble du spectre audible : diminuer sa taille conduirait à une diminution de l'amplitude du son sans amélioration audible de sa richesse.

b) La position x_0 du point d'attaque intervient dans l'expression de la vibration à nouveau par un sinus cardinal : $\frac{\sin(n\pi x_0/L)}{n\pi x_0/L}$. Pour supprimer l'harmonique de rang n il suffit que x_0 soit choisi de manière à annuler ce facteur. Pour éviter de supprimer des harmoniques de rang inférieur à n , il faut prendre la première annulation du sinus-cardinal

$$\frac{n\pi x_0}{L} = \pi ; \quad x_0 = \frac{L}{n}$$

I.C – Conséquences sur la conception des cordes d'un piano

I.C.1)

D'après la question I.B.2, la fréquence fondamentale de la corde vérifie $f = c/2L$, soit $L = \frac{c}{2f}$. Si la célérité est la même pour les différentes cordes, le produit Lf se conserve et, connaissant $f_{\text{Do } 4} = 262 \text{ Hz}$ et $L_{\text{Do } 4} = 65 \text{ cm}$, on détermine les valeurs

$$\text{Grave : } L_{\text{La } 0} = \frac{f_{\text{Do } 4}}{f_{\text{La } 0}} L_{\text{Do } 4} = \boxed{6,1 \text{ m !!}} ; \text{ Aigu : } L_{\text{Do } 8} = \frac{f_{\text{Do } 4}}{f_{\text{Do } 8}} L_{\text{Do } 4} = \boxed{4,1 \text{ cm !!}}$$

I.C.2)

On reprend la relation précédente en exprimant la célérité $c = \sqrt{T_0/\mu}$ $f = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

En augmentant la masse linéique des cordes, il est possible, à tension et longueur fixées, de diminuer leur fréquence fondamentale, et ainsi produire les notes graves sans augmentation de la longueur des cordes.

On peut envisager de diminuer la tension des cordes pour produire les notes graves. Cependant il y a un risque de mauvaise répartition des contraintes sur le cadre du piano. Et une corde trop molle n'obéit plus à l'équation de d'Alembert (poids non négligeable devant les forces de tension) et n'interagit plus de façon satisfaisante avec le marteau.

I.C.3)

La masse linéique de la corde filée a pour expression

$\mu = s_{\text{acier}} \rho_{\text{acier}} + s_{\text{Cu}} \rho_{\text{Cu}} = \frac{\pi}{4} (D^2 \rho_{\text{acier}} + ((D + 2e)^2 - D^2) \rho_{\text{Cu}}) = 89 \text{ g m}^{-1}$ On en déduit pour le La 0 de fréquence $f = 28 \text{ Hz}$

$$L = \frac{1}{2f} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \boxed{1,7 \text{ m}} \text{ ce qui est plus pratique que } 6 \text{ m.}$$

I.D – Prise en compte de la raideur : dispersion et inharmonicité

I.D.1)

a) L'équation aux dimensions s'écrit

$$[\Gamma] = \frac{L^4 \text{ Pression } L}{L^2} = \text{Pression } L^3 = \text{Force } L = \text{Couple}$$

b) Le principe théorème de la résultante cinétique est inchangé par rapport à la question I.A.2), et conduit aux deux équations scalaires

$$0 = \frac{\partial T_x}{\partial x} ; \quad \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x}$$

La première équation montre bien que T_x ne dépend que du temps. On le prend égal à T_0

c) Le mouvement de la corde se fait dans le plan xOy , donc le vecteur rotation du tronçon de corde de longueur dx , de barycentre G considéré est dirigé selon \vec{e}_z . La distance maximale des points de ce tronçon à l'axe Gz est $dx/2$, donc le moment d'inertie du tronçon par rapport à Gz est négligeable (ordre 3 en dx).

Le moment en G des actions s'appliquant sur le tronçon de corde à ses extrémités A d'abscisse x et B d'abscisse $x + dx$ a pour expression

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}} &= \vec{GB} \wedge \vec{T}_d(x + dx) + \vec{\Gamma}(x + dx) + \vec{GA} \wedge \vec{T}_g(x) - \vec{\Gamma}(x) \text{ avec } \vec{GB} = -\vec{GA} = \frac{dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y}{2} \\ \vec{\mathcal{M}} &= \frac{dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y}{2} \wedge (2T_0 \vec{e}_x + (T_y(x + dx) + T_y(x)) \vec{e}_y) + \vec{\Gamma}(x + dx) - \vec{\Gamma}(x) \\ &= \left(\frac{dx}{2} (T_y(x + dx) + T_y(x)) - dy T_0 + \Gamma(x + dx) - \Gamma(x) \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

soit à l'ordre 1 en dx

$$\vec{\mathcal{M}} = \left(T_y - \frac{\partial y}{\partial x} T_0 + \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) dx \vec{e}_z$$

Ce moment est d'ordre 1 en dx , donc le moment cinétique d'ordre 3 est bien négligeable. Le théorème du moment cinétique barycentrique s'écrit alors $\vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$, soit

$$T_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma}{\partial x}$$

d) On déduit des 2 questions précédentes l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $y(x, t)$:

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}$$

et, d'après l'expression de $\Gamma(x, t)$, on retombe bien sur :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + E \frac{\pi r^4}{4} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0$$

I.D.2)

a) L'expression proposée pour $y(x, t)$ conduit aux relations

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y ; \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = k^4 y$$

soit en reportant dans l'équation des mouvements de la corde

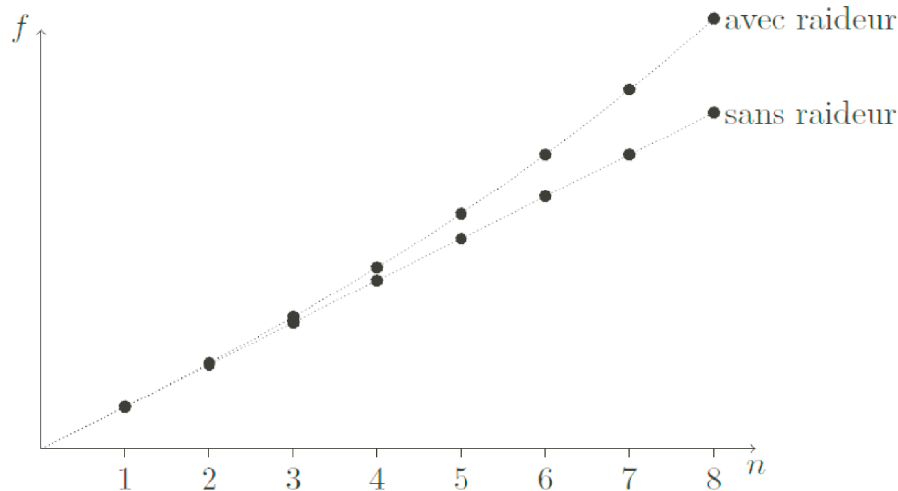
$$\omega^2 = \frac{T_0}{\mu} k^2 + E \frac{\pi r^4}{4\mu} k^4 = c^2 k^2 \left(1 + E \frac{\pi r^4}{4T_0} k^2 \right)$$

b) Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ sont inchangées par rapport au I.B), donc k vérifie toujours la relation $k_n = \frac{n\pi}{L}$.

Par conséquent, d'après la question précédente

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{ck_n}{2\pi} \sqrt{1 + E \frac{\pi r^4}{4T_0} k_n^2} = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + E \frac{\pi^3 r^4}{4T_0 L^2} n^2} = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2} ; \quad \boxed{B = \frac{\pi^3 E r^4}{4T_0 L^2}}$$

Il faut savoir que les cordes d'un piano à queue sont plus longues que celles d'un piano droit, donc la valeur de B est plus petite pour un piano à queue, et l'effet de la raideur des cordes est plus faible : la déviation des fréquences des harmoniques par rapport à une série arithmétique est plus petite.



c) Les fréquences propres de la corde sans raideur forment une suite arithmétique.
Celles de la corde avec raideur s'en écartent d'autant plus que leur rang n est élevé.

d) Application numérique : $B = 3,7 \times 10^{-4}$.

Pour les harmoniques de rang inférieur à 20, le facteur correctif Bn^2 est petit devant 1, et de manière approchée

$$f_n = n \frac{c}{2L} \sqrt{1 + Bn^2} = f_n^0 \sqrt{1 + Bn^2} \approx f_n^0 \left(1 + \frac{Bn^2}{2} \right)$$

On en déduit l'inharmonicité

$$i_n = \frac{f_n - f_n^0}{f_n^0} = \boxed{\frac{Bn^2}{2}}$$

e) On cherche à déterminer le rang n à partir duquel

$$\frac{f_n}{f_n^0} = \sqrt{1 + Bn^2} > 2^{1/12} ; \quad n > \sqrt{\frac{2^{1/6} - 1}{B}} = 18$$

L'écart sera supérieur au demi-ton à partir de l'harmonique de rang 18.

II Couplage entre une corde de piano et la table d'harmonie : le rôle du chevalet

II.A – Impédance caractéristique d'une corde vibrante

II.A.1)

La tension selon y associée à une onde progressive se propageant selon les x croissants est de la forme $T_y(x, y) = f(t - x/c)$. D'après la question I.A.2

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial v_y}{\partial t} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{-1}{c\mu} f'(t - x/c) \quad \text{puis} \quad v_y = \frac{-1}{c\mu} f(t - x/c)$$

puisque la fonction de x additionnelle n'a pas de sens physique.

$$\boxed{\text{Cela donne bien}} : \frac{T_y}{v_y} = -\mu c = -Z_C. \quad \boxed{Z_C = M \times T}$$

II.A.2)

Si l'onde se propage selon les z décroissants, $T_y(x, y) = f(t + x/c)$, ce qui conduit à un changement de signe de l'impédance caractéristique :

$$\boxed{\frac{T_y^-}{v_y} = \mu c = Z_C}$$

II.B – Couplage corde-chevalet

II.B.1)

Cette condition à la limite $x = L$ traduit le couplage énergétique entre la corde et l'ensemble chevalet + table d'harmonie. De la même façon qu'une résistance placée en bout de ligne bifilaire matérialise un transfert d'énergie par la ligne la résistance de l'extrémité, la résistance R représente des pertes pour la corde. Le signe moins est le même que dans l'impédance caractéristique.

II.B.2)

Les vibrations de la corde sont décrites par l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} ; \quad y(0, t) = 0 ; \quad \frac{T_y(L, t)}{v_y(L, t)} = T_0 \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(L, t)}{\frac{\partial y}{\partial t}(L, t)} = -R$$

On considère dans un premier temps l'équation de d'Alembert et la condition en $x = 0$

$$s^2 \exp(st) f(x) = c^2 \exp(st) f''(x) ; \quad f(0) \exp(st) = 0$$

soit les équations $f'' - \left(\frac{s}{c}\right)^2 f = 0 ; \quad f(0) = 0$ L'équation différentielle en f admet la solution générale $f(x) = a \exp\left(\frac{sx}{c}\right) + b \exp\left(-\frac{sx}{c}\right)$ les constantes d'intégration a et b étant liées par la condition $f(0) = a + b = 0 ; \quad b = -a$ soit, en considérant l'extension aux arguments complexes de la fonction \sinh

$$f(x) = a \left(\exp\left(\frac{sx}{c}\right) - \exp\left(-\frac{sx}{c}\right) \right) = A \sinh\left(\frac{sx}{c}\right)$$

La condition en $x = L$ s'écrit alors

$$-R = T_0 \frac{\frac{\partial y}{\partial x}(L, t)}{\frac{\partial y}{\partial t}(L, t)} = \frac{T_0 s \cosh(sL/c)}{cs \sinh(sL/c)} = \frac{T_0}{c \tanh(sL/c)}$$

soit, comme $T_0 = \mu c^2 \tanh\left(\frac{sL}{c}\right) = -\frac{T_0}{Rc} = -\frac{\mu c}{R} = -\frac{Z_C}{R} = -\frac{1}{r}$.

Problème n°2 : plongée sous-marine

RELATION ENTRE PRESSION et PROFONDEUR

1°) La relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit : $\vec{\text{grad}} p = \rho_e \vec{g}$. Puisqu'on nous demande d'utiliser comme variable la profondeur, prenons un axe (Oz) vertical descendant, avec son origine au niveau de l'interface air/mer. On aura donc $z = h$.

La projection de l'équation précédente sur les deux axes horizontaux prouve que p ne dépend que de z ;

Sa projection sur l'axe (Oz) donne $\frac{dp}{dz} = \rho_e g$.

L'eau étant considérée comme un fluide incompressible, ρ_e est une constante, donc l'équation différentielle précédente s'intègre facilement en $p(z) = p_0 + \rho_e g z = p_0 + \rho_e g h$.

AUTONOMIE du PLONGEUR Pour éviter les confusions on notera T les températures en K, associées aux θ , températures en °C.

2°) Commençons par calculer le nombre Δn de moles disponibles, en utilisant l'équation d'état du gaz parfait :

Au début, il y en a : $n_1 = \frac{p_1 V_{ac}}{RT_e}$. À la fin, il en reste $n_2 = \frac{p_2 V_{ac}}{RT_e}$. On a donc $\Delta n = n_2 - n_1 = \frac{(p_1 - p_2) V_{ac}}{RT_e}$.

On cherche le volume V auquel cela correspond, ramené aux conditions de pression et de température du corps du

plongeur : $V = \frac{\Delta n R T_p}{p(h)}$, d'où $V = \frac{(p_1 - p_2) V_{ac} T_p}{T_e (p_0 + \rho_e g h)}$.

3°) On nous donne en réalité un débit volumique $D_v = \frac{v}{\Delta t_0}$, exprimé en litres par minute, puisque $\Delta t_0 = 1$ minute. On

en déduit la durée : $\Delta t = \frac{V}{D_v}$, d'où $\Delta t = \frac{(p_1 - p_2) V_{ac} T_p}{T_e (p_0 + \rho_e g h) v} \Delta t_0$.

4°) A. N. $\Delta t_1 = \frac{(200 \cdot 10^5 - 20,0 \cdot 10^5) \times 20,0 \cdot 10^{-3} \times 310}{283 \times (1,00 \cdot 10^5 + 1000 \times 9,81 \times 60,0) \times 20,0 \cdot 10^{-3}} = 28,6 \text{ min.}$ $\Delta t_2 = \frac{(200 \cdot 10^5 - 20,0 \cdot 10^5) \times 310}{283 \times (1,00 \cdot 10^5 + 1000 \times 9,81 \times 20,0)} = 66,6 \text{ min.}$

EQUILIBRE et STABILITE du PLONGEUR

5°) Masse m_1 de la bouteille en début de plongée ($p_1 = 200$ bar) : $m_1 = m + n_1 M = m + \frac{p_1 V_{ac}}{RT_e} M$.

$$m_1 = 20,0 + \frac{200 \cdot 10^5 \times 20,0 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times 283} 29 \cdot 10^{-3} = 25 \text{ kg}$$

6°) Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, la force totale F_1 subie par le plongeur en début de plongée est la somme du poids et de la poussée d'Archimède, à la fois du plongeur (pl) et pour sa bouteille (bl) :

$$F_1 = -m_{pl} g + \pi_{a pl} - m_1 g + \pi_{a bl}.$$

D'après l'énoncé, les deux premiers termes se compensent exactement, d'où

$$F_1 = -m_1 g + \pi_{a bl} = -m_1 g + \rho_e V_T g. \text{ Numériquement, } F_1 = -24 \text{ N.}$$

7°) Masse m_2 de la bouteille en fin de plongée ($p_2 = 20,0$ bar) : $m_2 = m + n_2 M = m + \frac{p_2 V_{ac}}{RT_e} M$.

$$m_2 = 20,0 + \frac{20,0 \cdot 10^5 \times 20,0 \cdot 10^{-3}}{8,31 \times 283} 29 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ kg}$$

8°) $F_2 = -m_2 g + \pi_{a bl} = -m_2 g + \rho_e V_T g$. Numériquement, $F_2 = +20 \text{ N}$.

9°) L'air enfermé dans les poumons évolue à température constante, donc (d'après l'équation d'état) le produit pression x volume se conserve :

$$(p_0 + \rho_e g h_0) \times V_0 = (p_0 + \rho_e g h_3) \times V_3. \text{ Il vient } h_3 = h_0 \frac{V_0}{V_3} + \frac{p_0}{\rho_e g} \left(\frac{V_0}{V_3} - 1 \right).$$

$$\text{Numériquement, } h_3 = 20,0 \frac{3,00}{1,00} + \frac{1,00 \cdot 10^5}{1,00 \cdot 10^3 \times 9,81} \left(\frac{3,00}{1,00} - 1 \right) = 80,4 \text{ m.}$$

Sachant qu'à la profondeur h_0 , la résultante des forces sur le plongeur équipé était nulle (poids du plongeur, de la bouteille, poussée d'Archimède), le théorème de la résultante statique donne, en notant $m_{pl \text{ équipé}}$ la masse du plongeur équipé, et $V_{pl \text{ équipé}}$ son volume : $-m_{pl \text{ équipé}} g + \rho_e V_{pl \text{ équipé}} g = 0$.

Le poids ne change pas, mais la poussée d'Archimède devient (selon (Oz)) : $\rho_e (V_{pl \text{ équipé}} - V_0 + V_3) g$.

On en déduit $F_3 = \rho_e (-V_0 + V_3) g$. Numériquement, $F_3 = -19,6 \text{ N}$.

10°) De même, $h_4 = h_0 \frac{V_0}{V_4} + \frac{p_0}{\rho_e g} \left(\frac{V_0}{V_4} - 1 \right)$. Numériquement, $h_4 = 20,0 \frac{3,00}{5,00} + \frac{1,00 \cdot 10^5}{1,00 \cdot 10^3 \times 9,81} \left(\frac{3,00}{5,00} - 1 \right) = 7,92 \text{ m.}$

Et $F_4 = \rho_e (-V_0 + V_4) g$. Numériquement, $F_4 = +19,6 \text{ N}$.

11°) L'équilibre, à la profondeur h_0 , est instable. En effet, si une perturbation fait monter le plongeur, la pression qui agit sur lui diminue, donc le volume de ses poumons augmente (sans respirer ni souffler), donc la poussée d'Archimède augmente, alors que le poids ne change pas. Donc le plongeur monte encore plus vite. Et si une perturbation le fait descendre, la somme des forces qui agissent sur lui devient négative et il descend encore plus.

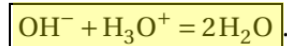
12°) Sans respirer ni souffler, le nombre de moles d'air dans les poumons est constant. Et comme la température l'est aussi, le produit pression \times volume est constant : $(P_0 + \rho_e g h_6) V_0 = (P_0) V_4$, d'où $h_6 = \frac{P_0}{\rho_e g} \left(\frac{V_4}{V_0} - 1 \right)$. $h_6 = 6,80 \text{ m}$.

13°) De la même façon, $(P_0) V_7 = (P_0 + \rho_e g h_7) V_3$ et $V_7 = V_4$, d'où $h_7 = \frac{P_0}{\rho_e g} \left(\frac{V_4}{V_3} - 1 \right)$. $h_7 = 40,8 \text{ m}$.

Problème n°3 :

A) Basicité et carbonatation d'un béton (Mines PSI 2016)

Q1 – Les ions Ca^{2+} et Cl^- sont spectateurs : ils ne réagissent pas. Le dosage est donc celui de OH^- par H_3O^+ :



La constante de cette réaction est l'inverse de celle du produit ionique de l'eau : $K = \frac{1}{K_e} = 10^{+14}$.

Q2 – Tout d'abord, on exploite la courbe de titrage : l'équivalence est obtenue pour un volume versé d'acide chlorhydrique $V_{eq} = 1,0 \text{ mL}$.

La relation de dosage est $c_{\text{HO}^-} \times V_{\text{HO}^-} = c_{\text{H}_3\text{O}^+} \times V_{eq}$, d'où $c_{\text{HO}^-} = \frac{0,50 \times 1,0}{100} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol L}^{-1}$.

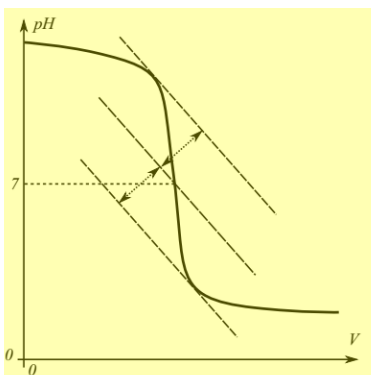
On peut donc maintenant calculer le pH d'une solution prélevée à la surface du béton : il s'agit d'une solution de HO^- à $5,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol L}^{-1}$.

Compte tenu du pK_e de l'eau, la concentration en H_3O^+ est $[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{10^{-14}}{5,0 \cdot 10^{-3}} = 2,0 \cdot 10^{-12}$. Ainsi, le pH est $pH = -\log(2,0 \cdot 10^{-12})$. $pH = 11,7$.

Q3 – De 0 à 1 mL, c'est-à-dire avant l'équivalence, on ajoute des ions Cl^- , mais en même temps, chaque H_3O^+ ajouté réagit avec un HO^- pour donner une molécule d'eau. Le bilan est donc qu'on remplace des ions HO^- par des ions Cl^- . Or le tableau de l'énoncé montre bien que la conductivité ionique molaire de Cl^- est plus faible que celle de HO^- . Il est donc normal que la conductivité de la solution diminue.

Au-delà de 1 mL, c'est-à-dire après l'équivalence, on ajoute des H_3O^+ et des Cl^- . Aucun de ces deux ions ne réagit (les Cl^- sont des ions spectateurs dans toute l'expérience, et les ions H_3O^+ ne réagissent plus car on a dépassé l'équivalence, donc il n'y a plus (ou quasiment plus) de HO^- à éliminer), donc la conductivité augmente.

Q4 – Si on avait fait un dosage pH-métrique plutôt que conductimétrique, on aurait obtenu la courbe classique en forme de "S" du titrage d'une base forte par un acide fort :



Le pH de l'équivalence est de $pH_{eq} = 7$ puisque cela correspond à une quantité égale de HO^- et H_3O^+ introduits.

B) ÉTUDE DE LA RÉDUCTION DE L'OXYDE DE ZINC

1 $[4] = \frac{1}{2} ([2] - [3])$ donc :

Q5. $\Delta_{r,4}G^\circ(1000^\circ\text{C}) = \frac{1}{2} (\Delta_{r,2}G^\circ(1000^\circ\text{C}) - \Delta_{r,3}G^\circ(1000^\circ\text{C})) = -52,265 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

Q6. $K^\circ_4(T) = \exp(-\Delta_{r,4}G^\circ(T)/RT)$ d'où : $K^\circ_4(1000^\circ\text{C}) = 139,4$

Q7. $[5] = \frac{1}{2} ([3] - [1])$ donc :

$$\Delta_{r,5}G^\circ(1000^\circ\text{C}) = \frac{1}{2} (\Delta_{r,3}G^\circ(1000^\circ\text{C}) - \Delta_{r,1}G^\circ(1000^\circ\text{C})) = \boxed{33,000 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

$$K^\circ_5(T) = \exp(-\Delta_{r,5}G^\circ(T)/RT) \text{ d'où : } \boxed{K^\circ_5(1000^\circ\text{C}) = 4,43 \cdot 10^{-2}}$$

Q8. $\text{CO(g)} + \text{ZnO(s)} = \text{CO}_2\text{(g)} + \text{Zn(g)}$

$$n-\xi \quad \text{excès} \quad \xi \quad \xi \quad n_{\text{tot,gaz}} = n + \xi$$

$$\text{A l'équilibre : } P(\text{CO}_2) = P(\text{Zn}) = \frac{\xi}{n+\xi} P_{\text{tot}} = \frac{\xi/n}{1+\xi/n} P_{\text{tot}} \text{ et } P(\text{CO}) = \frac{n-\xi}{n+\xi} P_{\text{tot}} = \frac{1-\xi/n}{1+\xi/n} P_{\text{tot}},$$

$$\text{et puisque } P_{\text{tot}} = P^0, \quad K^\circ_5 = \frac{\xi^2}{n^2 - \xi^2} = \frac{\left(\frac{\xi}{n}\right)^2}{1 - \left(\frac{\xi}{n}\right)^2}, \text{ d'où } \frac{\xi}{n} = \sqrt{\frac{K^\circ_5}{1+K^\circ_5}}$$

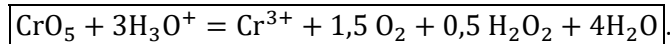
On en déduit :

$$\boxed{P(\text{Zn}) = \frac{\frac{\xi}{n}}{1+\frac{\xi}{n}} P_{\text{tot}} = 0,171 \text{ bar} = P(\text{CO}_2)} \text{ et } \boxed{P(\text{CO}) = \frac{1-\frac{\xi}{n}}{1+\frac{\xi}{n}} P_{\text{tot}} = 0,659 \text{ bar}}$$

Q9. $[6] = ([4] + [5])$ donc : $\boxed{K^\circ_6(1000^\circ\text{C}) = K^\circ_4(1000^\circ\text{C}) * K^\circ_5(1000^\circ\text{C}) = 6,17}$

C) Chimie Mines Ponts PSI 2023 extrait ÉVOLUTION DES SOLUTIONS ACIDES AQUEUSES DE CrO_5

Q19- Compte tenu des indications de l'énoncé, la réaction s'écrit :



Il s'agit bien d'une réaction d'oxydo-réduction, car :

- Le nombre d'oxydation du chrome passe de +X dans CrO_5 à +III dans Cr^{3+} ;
- Le nombre d'oxydation de l'oxygène passe de -II dans H_3O^+ (et dans CrO_5) à -I dans H_2O_2 et 0 dans O_2 .

L'oxydant est donc CrO_5 , et le réducteur H_3O^+ . Rappel : l'oxydant se réduit, et le réducteur s'oxyde.

Q20- Conformément à l'énoncé, la vitesse de réaction peut s'écrire :

$$r = k_1[\text{CrO}_5][\text{H}_3\text{O}^+] + k_2[\text{CrO}_5\text{H}^+][\text{H}_3\text{O}^+],$$

$$\text{Or, } [\text{CrO}_5]_{\text{tot}} = [\text{CrO}_5] + [\text{CrO}_5\text{H}^+] = [\text{CrO}_5] \left(1 + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_{a\text{Cref}}} \right),$$

$$\text{donc } [\text{CrO}_5] = \frac{[\text{CrO}_5]_{\text{tot}}}{1 + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_{a\text{Cref}}}}, \text{ et } [\text{CrO}_5\text{H}^+] = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{CrO}_5]_{\text{tot}}}{K_{a\text{Cref}} \left(1 + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_{a\text{Cref}}} \right)}$$

$$\begin{aligned} \text{Il vient : } r &= k_1[\text{H}_3\text{O}^+] \frac{[\text{CrO}_5]_{\text{tot}}}{1 + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_{a\text{Cref}}}} + k_2[\text{H}_3\text{O}^+] \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{CrO}_5]_{\text{tot}}}{K_{a\text{Cref}} \left(1 + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_{a\text{Cref}}} \right)} \\ &= k_1 K_{a\text{Cref}} [\text{H}_3\text{O}^+] \frac{[\text{CrO}_5]_{\text{tot}}}{K_{a\text{Cref}} + [\text{H}_3\text{O}^+]} + k_2 [\text{H}_3\text{O}^+]^2 \frac{[\text{CrO}_5]_{\text{tot}}}{K_{a\text{Cref}} + [\text{H}_3\text{O}^+]}, \end{aligned}$$

$$\text{C'est-à-dire } r = k_d [\text{CrO}_5]_{\text{tot}}, \text{ avec } \boxed{k_d = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+](k_1 K_{a\text{Cref}} + k_2 [\text{H}_3\text{O}^+])}{K_{a\text{Cref}} + [\text{H}_3\text{O}^+]}}.$$

Q21- Pour vérifier cette relation (en gardant les ions oxonium toujours en excès pour rester dans les hypothèses de l'énoncé), on peut faire varier le pH et tracer $k_d \frac{K_{a\text{Cref}} + [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$ en fonction de $[\text{H}_3\text{O}^+]$. En faisant une régression linéaire, on peut alors trouver le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine, puis en déduire k_2 et $k_1 K_{a\text{Cref}}$. Puis on en déduit k_2 et k_1 .

$$\text{Q22- Puisque } r = -\frac{d[\text{CrO}_5]_{\text{tot}}}{dt} = k_d [\text{CrO}_5]_{\text{tot}},$$

$$\text{on obtient en intégrant, } [\text{CrO}_5]_{\text{tot}}(t) = [\text{CrO}_5]_{\text{tot}}(0) \exp(-k_d t).$$

$$\text{Le temps de demi-réaction vérifie donc : } [\text{CrO}_5]_{\text{tot}}(t_{1/2}) = [\text{CrO}_5]_{\text{tot}}(0) \exp(-k_d t_{1/2}) = \frac{[\text{CrO}_5]_{\text{tot}}(0)}{2}, \text{ d'où}$$

$$\exp(-k_d t_{1/2}) = \frac{1}{2}, \text{ puis } \boxed{t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k_d}}.$$

Numériquement, et sans calculatrice (c'était ainsi), on obtient, avec les valeurs approchées de l'énoncé :

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{0,7}{0,01 \times (0,13 \times 8 \times 1 + 1,1 \times 0,01)} \approx \frac{0,7 \times 8}{0,01 \times (1,04 + 0,011)} \approx \frac{5,6}{0,01} \approx 6 \cdot 10^2 \text{ s}}$$