SÉRIES ENTIÈRES

Exercices

1 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^n}$ 2. $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) z^n$ 3. $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + 2^n\right) x^n$ 4. $\sum \frac{n!}{(2n)!} x^n$ 5. $\sum_{n\geqslant 1} n^{\sqrt{n}} x^n$

6. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{n!} z^n$ 7. $\sum \frac{z^{2n}}{3^n}$ 8. $\sum \frac{\mathrm{sh} n}{\mathrm{ch}^2 n} x^n$ 9. $\sum e^{\sqrt{n+1}} x^{3n}$ 10. $\sum \frac{z^{n!}}{n!}$

11. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos n}{n} x^n$ 12. $\sum a^{n^\alpha} z^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ 13. $\sum \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) x^n$ 14. $\sum \left(\int_0^1 t^n e^{-t} \mathrm{d}t\right) x^n$

15. $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ où a_n est la n-ème décimal de $\sqrt{2}$ 16. $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ où a_n est le nombre de diviseurs de n

---

2

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.
   On note R_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{2n} z^{2n}$ et R_2 celui de $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$.
   Montrer que $R = \min(R_1, R_2)$.

2. *Application 1*
   Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
   On considère la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $c_{2n} = a_n$ et $c_{2n+1} = b_n$.
   Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$.

3. *Application 2*
   Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+2}}{a_n}\right| = \ell$ où $\ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$.
   Déterminer son rayon de convergence.

---

3 Soit F une fraction rationnelle non nulle c'est-à-dire $F = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes non nuls.
Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum F(n) a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

---

4 On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$.
Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

---

5 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et calculer leur somme.

1. $\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n$ 2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$ 3. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^2+1}{n!} x^n$ 4. $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{ch} n\, x^n$ 5. $\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$

6. $\sum_{n\geqslant 3} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$ 7. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ 8. $\sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)}$

9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)}$ 10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{nx^n}{(2n+1)!}$ 11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n$ 12. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin(n\alpha)x^n}{n!}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

13. $\displaystyle\sum_{n\geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ $(k \in \mathbb{N})$ 14. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{i+j=n} a_i a_j$

---

6 Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{2n}$.
Indication : On pourra montrer qu'elle est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

---

7 Développer en série entière les fonctions suivantes.

1. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{2-x}{3-x^2}\right)$ 2. $x \mapsto \ln(1+x-2x^2)$ 3. $x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(1+3x)}$ 4. $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1+x}$

5. $x \mapsto \sin^2 x \cos x$ 6. $x \mapsto (\cos x)e^x$ 7. $x \mapsto \mathrm{ch}x \cos x$ 8. $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\mathrm{d}t$

9. $x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ 10. $x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 11. $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ 12. $x \mapsto \mathrm{Arctan}(1+x)$

---

8 Trouver un problème de Cauchy dont la fonction f est solution et en déduire le développement en série entière de f.

1. $f : x \mapsto e^{x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ 2. $f : x \mapsto (\mathrm{Arcsin}x)^2$

---

9 On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$.
2. La fonction f est-elle développable en série entière ?

---

10 Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]-a,a[,\ |f^{(n)}(x)|a^n \leqslant bn!$ alors f est développable en série entière.
2. Montrer que si f et toutes ses dérivées sont positives alors f est développable en série entière de rayon de convergence infini.

---

11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$ si $x \geqslant 0$ et $f(x) = \cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$.
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

---

12 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}(x) \leqslant \exp\left(\dfrac{x^2}{2}\right)$.

13 On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 - x\cos^2 t}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t \right) x^n$.

2. Établir par ailleurs que pour tout $x \in]-1, 1[$, $F(x) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x}}$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

14 On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

2. Montrer que pour tout $t \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\sin^{2n+1}(t)}{2n+1}$.

3. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

---

15 Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ est bien définie et continue sur $]-1, 1]$ et en déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

---

16 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ est minoré par $\frac{1}{2}$ et calculer sa somme.

2. En déduire une expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

17 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$ et en déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

2. On note S la somme de cette série entière.
   Montrer que S est solution d'une équation différentielle du premier ordre et exprimer S à l'aide de fonctions usuelles.

---

18 Pour chaque équation différentielle ci-dessous, chercher les fonctions développables en série entière qui sont solution puis déterminer leur expression explicite.

1. $x^2 y'' + x(x+1)y' - y = 0$

2. $y'' - 2xy' - 4y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

3. $(1 + x^2)y'' - 2y = 0$

$\boxed{19}$ Dans un magasin, la barquette de fraises coûte 1 euro, la barquette de framboises coûte 2 euros et la barquette de cerises coûte 3 euros. On dispose de n euros ($n \in \mathbb{N}$).
On souhaite déterminer le nombre de façons de dépenser intégralement ces n euros en barquettes de fruits. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note alors $u_n = \mathrm{Card}\{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3,\ i + 2j + 3k = n\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{1-x^3}$.

2. En admettant que pour tout $x \in]-1,1[$:
$$\frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)} = \frac{1}{6(1-x)^3} + \frac{1}{4(1-x)^2} + \frac{17}{72(1-x)} + \frac{1}{8(1+x)} - \frac{j}{9(x-j)} - \frac{\bar{j}}{9(x-\bar{j})}$$
(où $j = e^{2i\pi/3}$), déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{20}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle *involution de* $[\![1,n]\!]$ toute application $s : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telle que $s \circ s = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$.
On note I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$.
On pose $I_0 = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$.

2. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ converge.

   On note S la fonction somme.

3. Justifier que pour tout $x \in]-1,1[$, on a $S'(x) = (1+x)S(x)$.

4. En déduire une expression de $S(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$ puis de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.