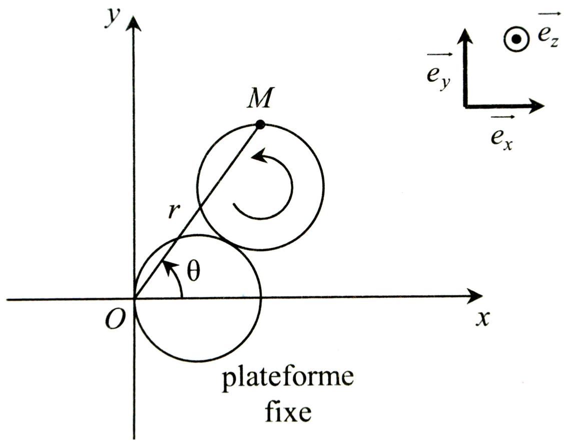
Manège

Dans le référentiel terrestre R, on définit un repère $Oxyz$ avec un axe (Oz) vertical ascendant. La figure ci-contre est une vue dessus. Un manège est constitué de deux plateformes circulaires horizontales de même rayon R : l'une est immobile par rapport au référentiel terrestre, sa circonférence passe par l'origine O du repère et son centre est sur l'axe $(0x)$; l'autre peut rouler sans glisser autour de la première.



Un enfant, assimilé à un point M, a pris place sur le manège, en un point de la circonférence de la plateforme mobile. M décrit alors une trajectoire contenue dans le plan horizontal (Oxy) et décrite par l'équation polaire :

$$r = 2R(1 + \cos\theta)$$

et on suppose de plus que la vitesse angulaire omega est maintenue constante, soit

$$\theta = \omega t$$

à partir de l'instant initial $t = 0$.

1. Trajectoire :

   Q1 Reproduire sur un schéma les axes du plan et le cercle représentant la plateforme fixe. Placer sur ce schéma les quatre points de la trajectoire de M correspondant aux angles $\theta = 0$ (ce point sera noté A), $\theta = \frac{\pi}{2}$ (point B), $\theta = \pi$ (point C), $\theta = 3\frac{\pi}{2}$ (point D), puis dessiner l'allure de la trajectoire complète (cette courbe s'appelle une cardioïde).

   Ajouter la base cylindrique (vecteurs $\vec{e_r}, \vec{e}_\theta, \vec{e_z}$) au point D.

2. Vitesse :

   Q2 (a) Déterminer, en fonction du temps t et des deux constantes R et ω, les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}(M)$ dans R dans la base cylindrique. Dessiner ce vecteur au point D.

   Q3 (b) Calculer la norme de la vitesse.

   Q4 (c) En quel point l'enfant risque-t-il le plus d'être éjecté du manège (vitesse maximale), et dans quelle direction serait-il alors éjecté ?

   Q5 (d) En quel point l'enfant pourra-t-il essayer de descendre du manège (vitesse nulle) ?

3. Accélération :

   Q6 (a) Déterminer les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(M)$ dans R dans la base cylindrique. Dessiner ce vecteur au point D.

   Q7 (b) Calculer la norme de l'accélération.

   Q8 (c) Il n'existe pas de sensation absolue de vitesse, en revanche ce qu'on ressent fortement est l'accélération que l'on subit. En quel point l'enfant risque-t-il le plus de se sentir mal (accélération maximale) ?

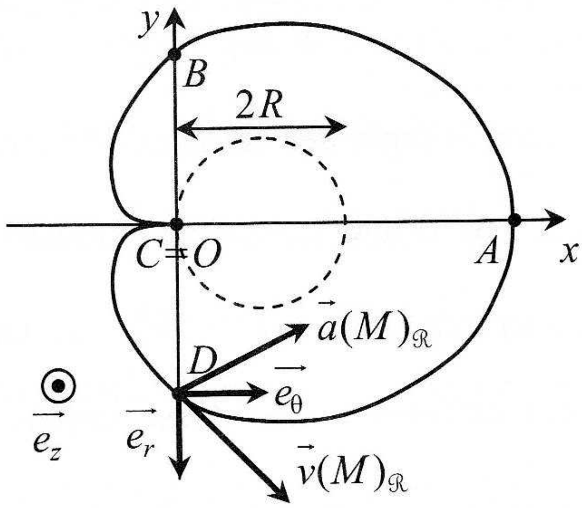
Manège

1. Trajectoire

Au point A, on a $\theta = 0$ et $r = 2R \times 2 = 4R$.
Au point B, on a $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $r = 2R$.
Au point C, on a $\theta = \pi$ et $r = 2R(1-1) = 0$.
Q9 Au point D, on a $\theta = \frac{3\pi}{2}$ et $r = 2R$.

De plus, d'après l'équation de la trajectoire, on voit que pour chaque θ, il existe un unique r correspondant. La trajectoire ne se recoupe donc pas. On voit aussi que r diminue sur l'intervalle $\theta \in [0{,}\pi]$, car la fonction cosinus est alors croissante, et r augmente sur l'intervalle $\theta \in [\pi{,}2\pi]$ car la fonction cosinus est décroissante sur cet intervalle.

Finalement, la trajectoire du point M a l'allure ci-contre.



Attention, la trajectoire n'est pas circulaire, $\vec{u_\theta}$ n'est donc pas tangent à la trajectoire et $\vec{u_r}$ n'est pas normal à la trajectoire.

Par contre, la vitesse est toujours tangente à la trajectoire, et l'accélération pointe toujours vers l'intérieur de la trajectoire.

2. Vitesse

(a) Le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = r\vec{u_r} + z\vec{u_z}$ avec $r = 2R(1-\cos\theta)$, $\theta = \omega t$ (donc $\dot\theta = \omega$) et $z = 0$. On en
Q10 déduit $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dot r\vec{u_r} + r\dot\theta\vec{u_\theta} = -2R\dot\theta\sin\theta\vec{u_r} + 2R\omega(1+\cos\theta)\vec{u_\theta}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{v} = -2R\omega\sin(\omega t)\vec{u_r} + 2R\omega(1+\cos(\omega t))\vec{u_\theta}}$$

Attention, on n'est pas dans le cas particulier d'un mouvement circulaire, il ne faut donc surtout pas oublier le terme $\dot r$. De même, attention à ne pas oublier que θ dépend du temps et donc $\cos\theta(t)$ doit être dérivé comme une composé de fonctions.

(b) On a

$$\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{[-2R\omega\sin(\omega t)]^2 + [2R\omega(1+\cos(\omega t))]^2} = \sqrt{4R^2\omega^2[\sin^2(\omega t) + (1+\cos^2(\omega t))]^2}$$

$$= 2R\omega\sqrt{1 + 2\cos(\omega t) + \underbrace{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}_{=1}} = 2R\omega\sqrt{2[1+\cos(\omega t)]}$$

Or, on sait que $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Leftrightarrow 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ (pas indispensable ici, mais c'est parfois utile d'y penser). Ainsi, $[1+\cos(\omega t)] = 2\cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$.

Q11 Finalement $v = 2R\omega\sqrt{2\times 2\cos^2\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)} \Leftrightarrow \boxed{v = 4R\omega\left|\cos\left(\dfrac{\omega t}{2}\right)\right|}$

(c) v est maximale lorsque $\left|\cos\left(\frac{\omega t}{2}\right)\right| = \left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$ est maximal, c'est-à-dire lorsque

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = k\pi \Leftrightarrow \boxed{\theta = 2k\pi}$$

Q12 Cela correspond au $\boxed{\text{point } A}$. La vitesse vaut alors

$$\vec{v_A} = -2R\sin(2k\pi)\omega\vec{u_r} + 2R\omega(1+\cos(2k\pi))\vec{u_\theta} = 4R\omega\vec{u_\theta}$$

Or, au point A, $\vec{u_\theta} = \vec{u_y}$, donc l'enfant risque d'être éjecté dans $\boxed{\text{la direction } \vec{u_y}}$.

Q13 (d) La vitesse est nulle lorsque $\cos\dfrac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \boxed{\theta = \pi + 2k\pi}$ L'enfant peut donc descendre au $\boxed{\text{point } C}$.

3. Accélération

(a) Par définition, $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-2R\omega\sin(\omega t)\vec{u_r} + 2R\omega(1+\cos(\omega t))\vec{u_\theta}\right)$

$$= -2R\omega\omega\cos(\omega t)\vec{u_r} - 2R\sin(\omega t)\underbrace{\dot{\theta}}_{=\omega}\vec{u_\theta} + 2R\omega(-\omega\sin(\omega t))\vec{u_\theta} + 2R\omega(1+\cos(\omega t))(-\underbrace{\dot{\theta}}_{=\omega})\vec{u_r}$$

$$= -4R\omega^2\sin(\omega t)\vec{u_\theta} + 2R\omega^2(-1-2\cos(\omega t))\vec{u_r} \Leftrightarrow \boxed{\vec{a} = -4R\omega^2\sin(\omega t)\vec{u_\theta} - 2R\omega^2(1+2\cos(\omega t))\vec{u_r}}$$

Q14 Au point D, on a $\theta = \frac{3\pi}{2}$, donc $\cos\omega t = \cos\theta = 0$ et $\sin\omega t = \sin\theta = -1$, d'où

$$\boxed{\vec{a}_D = 4R\omega^2\vec{u_\theta} - 2R\omega^2\vec{u_r}}$$

La composante de l'accélération suivant $\vec{u_\theta}$ est donc 2 fois plus importance que la composante de l'accélération suivant $\vec{u_r}$. Cette accélération a été représentée sur le premier schéma.

(b) On a

$$a = \left\|\vec{a}\right\| = 2R\omega^2\sqrt{[-2\sin(\omega t)]^2 + [1+2\cos(\omega t)]^2} = 2R\omega^2\sqrt{4\sin^2(\omega t) + 1 + 4\cos(\omega t) + 4\cos^2(\omega t)}$$

Q15

$$= 2R\omega^2\sqrt{4+1+4\cos(\omega t)} \Leftrightarrow \boxed{a = 3R\omega^2\sqrt{5+4\cos(\omega t)}}$$

Q16 (c) L'accélération est maximale lorsque $\cos(\omega t) = \cos\theta$ est maximal, c'est-à-dire en $\theta = 0$. L'enfant risque de se sentir mal au $\boxed{\text{point } A}$.