DEVOIR SURVEILLÉ 3 – Sujet niveau 1

28/11/25 Durée 4h

Exercice 1 : Étude de la diagonalisabilité d'une matrice

On considère la matrice A de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice A.

Q2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(A - I_3)$.

Q3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 : La fonction $\ln(\Gamma)$

Présentation générale

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$,

(ii) pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$,

(iii) la fonction f' est croissante,

(iv) la fonction f s'annule en 1, c'est-à-dire $f(1) = 0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

Partie I - Existence de la solution du problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

Q4. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

Q5. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0,+\infty[, \quad u_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n.$$

Q6. En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.

Q7. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

Les questions **Q8** et **Q9** sont indépendantes.

Q8. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.

Q9. Soient $x \in]0,1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer successivement que :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leqslant h'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p) - g'(p), \quad \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.$$

En déduire que :

$$|h'(x+p) - h'(p)| \leqslant \frac{1}{p}.$$

Q10. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0,+\infty[$.

Q11. Conclure que $\varphi = g$.

Exercice 3 : Matrices de rang 1

On rappelle que $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathscr{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}$ et $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$.

Partie I - Étude d'un exemple

Soit $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 V_0^{\mathsf{T}}$.

Q12. Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?

Q13. Justifier que 0 est valeur propre de A_0 puis déterminer une base du sous-espace propre associé.

Q14. Calculer $A_0 U_0$ et la trace de A_0.

Q15. Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

Q16. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$. Justifier votre réponse.

Partie II - Diagonalisabilité des matrices de rang 1

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

Q17. On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.

Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} \ell_1 \cdots \ell_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$.

Q18. Vérifier que $LC = \mathrm{tr}(A)$ puis montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$ où $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de A.

Q19. En déduire que le spectre de A est inclus dans $\{0,\ \mathrm{tr}(A)\}$.

Q20. Montrer que 0 est une valeur propre de A. Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?

Q21. Vérifier que $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre de A.

Q22. Montrer que : A est diagonalisable $\Longleftrightarrow \mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Partie III - Une application

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $f \circ f \neq \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul.
On désigne par u un vecteur de E tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.

Q23. Montrer que $f(u) \neq 0$.

Q24. En déduire que l'endomorphisme f possède une valeur propre réelle non nulle.

Q25. Montrer alors que f est un endomorphisme diagonalisable.

Exercice 4 : Étude d'une série de fonctions et de sa somme

Soit α un réel strictement positif.
Pour n entier naturel non nul, on considère l'application u_n de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}.$$

Partie I - Étude des modes de convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$

Q26. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

Q27. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = \dfrac{1}{2n^{\alpha+1/2}}$.

Q28. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Q29. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Prouver que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[a, b]$.

Q30. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[1, +\infty[$.

Q31. On suppose dans cette question que $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Pour x élément de $[0, +\infty[$, on pose :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x).$$

(a) Établir l'inégalité $R_n(x) \geqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1 + kx^2)}$.

(b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, a]$ où a est un réel strictement positif.

Partie II - Étude des propriétés de la somme de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$

On note S l'application de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Q32. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, S est continue sur $]0, +\infty[$.

Q33. Montrer que si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ alors S est continue sur $[0, +\infty[$.

Q34. On suppose que $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$. Soit x un réel strictement positif.

(a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_1^n \frac{x}{\sqrt{t}(1 + tx^2)} \mathrm{d}t$.

(b) Montrer alors : $\pi - 2\mathrm{Arctan}(x) \leqslant S(x)$.

(c) En déduire que S n'est pas continue en 0.

Q35. Déterminer la limite de S en $+\infty$.