CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 3

EXERCICE 1

Q1. Déterminons le polynôme caractéristique de A.
En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\chi_A = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1).$$

$$\boxed{\chi_A = (X-1)^2(X+1).}$$

Q2. On a $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A - I_3) \Leftrightarrow (A-I_3)X = 0_{3,1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ -y+z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(A - I_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

On en déduit que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est génératrice de $\mathrm{Ker}(A - I_3)$.

Comme elle est de plus libre (puisque constituée d'un seul vecteur non nul), on en déduit que :

$$\boxed{\text{la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(A - I_3).}$$

Q3. On déduit de la question 1 que $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 1\}$, $m_{-1} = 1$ et $m_1 = 2$ (ce sont les multiplicités).
Or, $\dim(E_1) = \dim\big(\mathrm{Ker}(A - I_3)\big) = 1$ car la base trouvée en question 2 comporte 1 vecteur.
Comme la multiplicité de la valeur propre 1 n'est pas égale à la dimension de E_1, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

EXERCICE 2 *Source : CCINP PC 2024*

Q4. Soir $x \in]0, +\infty[$. Montrons que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$ converge.

Utilisons un développement limité. Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{x}{n} = 0$ et $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \underset{t \to 0}{o}\left(t^2\right)$, on a :

$$u_n(x) = x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{x^2 - x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} \geqslant 0$ et la série de Riemann $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge (car $2 > 1$).

Par comparaison, on en déduit que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \textstyle\sum_{n \geqslant 1} u_n \text{ converge simplement sur }]0, +\infty[.}$$

Q5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction affine $x \mapsto 1 + \dfrac{x}{n}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction ln est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ donc par composition, la fonction $x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
Par multiplication par la constante -1 puis somme avec la fonction affine $x \mapsto x\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, on en déduit que la fonction u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
Ainsi :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite de fonctions de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$u_n'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}$.
On a d'après le développement limité ci-dessus, $\varepsilon_n = -\dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.
On a donc $|\varepsilon_n| \sim \dfrac{1}{2n^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2n^2} \geqslant 0$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2}$ converge.
Par comparaison, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \varepsilon_n$ converge absolument.

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n \text{ converge absolument et } \forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0,+\infty[, \quad u_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n.}$$

Q6. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a \leqslant b$. Montrons que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|u_n'\|_\infty^{[a,b]}$ converge.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in [a,b]$. On a par inégalité triangulaire :

$$|u_n'(x)| \leqslant \left|\frac{x}{n(n+x)}\right| + |\varepsilon_n| = \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n|.$$

Comme $0 \leqslant x \leqslant b$ et $n(n+x) \geqslant n(n+a) > 0$, on obtient :

$$\frac{x}{n(n+x)} \leqslant \frac{b}{n(n+a)}.$$

Ainsi, $\dfrac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|$ est un majorant de l'ensemble $\{|u_n'(x)|, x \in [a,b]\}$ et $\|u_n'\|_\infty^{[a,b]}$ est le plus petit des majorants de cet ensemble donc :

$$\|u_n'\|_\infty^{[a,b]} \leqslant \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|.$$

On a de plus $\dfrac{b}{n(n+a)} \sim \dfrac{b}{n^2}$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{b}{n^2} \geqslant 0$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{b}{n^2}$ converge donc par comparaison, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{b}{n(n+a)}$ converge.
Comme la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} |\varepsilon_n|$ converge, on en déduit par somme que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|\right)$ converge.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n'\|_\infty^{[a,b]} \geqslant 0$, on en déduit par comparaison par inégalité que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|u_n'\|_\infty^{[a,b]}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série de fonctions } \sum_{n\geqslant 1} u_n' \text{ converge normalement sur tout segment } [a,b] \text{ inclus dans }]0,+\infty[.}$$

Q7. (i) Notons $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
Vérifions les hypothèses du théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des sommes de séries de fonctions.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ (d'après **Q5**).

- La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ (d'après **Q4**).

- La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$ (d'après **Q5**) et donc uniformément sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.

En appliquant le théorème sur chaque segment de $]0, +\infty[$, on obtient que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $]0, +\infty[$ et donc sur $]0, +\infty[$ (car la classe $\mathscr{C}^1$ est une propriété locale).
Comme la fonction $x \mapsto -\ln x$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit par somme que

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

(ii) Soit $x \in]0, +\infty[$. Calculons $\varphi(x+1) - \varphi(x)$.

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\ln(x+1) + \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n(x+1) - u_n(x)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
u_n(x+1) - u_n(x) &= (x+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) - x\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \\
&= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+x+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+x}{n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(n+x+1) + \ln n + \ln(n+x) - \ln n \\
&= \ln(n+1) - \ln n + \ln(n+x) - \ln(n+x+1) \\
&= \ln\left(\frac{n+x}{n}\right) - \ln\left(\frac{n+x+1}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\right)$ est une série télescopique, on a pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{1}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{N+1}\right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)\right) = \ln(1+x) - 0 = \ln(1+x).$$

Ainsi :

$$\boxed{\varphi(x+1) - \varphi(x) =} -\ln(x+1) + \ln(x) + \ln(1+x) = \boxed{\ln(x).}$$

(iii) On a pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{x} + S'(x)$.
La fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ est croissante sur $]0, +\infty[$. Montrons que S' l'est aussi.

Par le théorème de classe $\mathscr{C}^1$ des sommes de séries de fonctions dont les hypothèses ont été vérifiées plus haut, on obtient aussi que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} + \varepsilon_n\right).$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < x \leqslant y$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 < n+x \leqslant n+y$ donc $\dfrac{1}{n+x} \geqslant \dfrac{1}{n+y}$ donc $\dfrac{-1}{n+x} \leqslant \dfrac{-1}{n+y}$ donc

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} + \varepsilon_n \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} + \varepsilon_n.$$

Par somme (les séries en jeu sont bien convergentes), on en déduit que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} + \varepsilon_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} + \varepsilon_n\right) \text{ c'est-à-dire } S'(x) \leqslant S'(y).$$

La fonction S' est donc croissante sur $]0,+\infty[$.
Par somme de deux fonctions croissantes, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi' \text{ est croissante sur }]0,+\infty[.}$$

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n(1) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 0$.
Ainsi, $\boxed{\varphi(1) =} -\ln(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \boxed{0.}$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ vérifie les conditions de (C).}}$$

Q8. Soit $x > 0$. On a :

$$h(x+1) - h(x) = \varphi(x+1) - g(x+1) - \varphi(x) + g(x) = (\varphi(x+1) - \varphi(x)) - (g(x+1) - g(x)) = \ln x - \ln x = 0$$

car φ et g vérifient la condition (ii).
Ainsi :

$$\boxed{\forall x > 0,\ h(x+1) = h(x).}$$

Comme φ et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (condition (i)), la fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Par composition, la fonction $x \mapsto h(x+1)$ l'est également et a pour dérivée $x \mapsto 1 \times h'(x+1)$.
En dérivant l'égalité encadrée ci-dessus, on obtient alors :

$$\boxed{\forall x > 0,\ h'(x+1) = h'(x).}$$

Q9. On a $h' = \varphi' - g'$ donc $h'(x+p) = \varphi'(x+p) - g'(x+p)$.
Comme φ' et g' sont croissantes sur $]0,+\infty[$ (condition (iii)), on a :

$$\varphi'(p) \leqslant \varphi'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p) \text{ et } g'(p) \leqslant g'(x+p) \leqslant g'(1+p)$$

car $p \leqslant x+p \leqslant 1+p$.
En multipliant par $-1 \leqslant 0$, on a $-g'(1+p) \leqslant -g'(x+p) \leqslant -g'(p)$ puis par somme, on obtient :

$$\boxed{\varphi'(p) - g'(1+p) \leqslant h'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p) - g'(p).}$$

On a $h'(p) = \varphi'(p) - g'(p)$ donc :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) + g'(p) - g'(1+p).$$

Or, pour tout $t \in]0,+\infty[$, $g(t+1) - g(t) = \ln(t)$ (condition (ii)) donc par dérivation, $g'(t+1) - g'(t) = \dfrac{1}{t}$.
En appliquant ceci en p, on obtient :

$$\boxed{\varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.}$$

On a de même :

$$\varphi'(1+p) - g'(p) = \varphi'(1+p) - (\varphi'(p) - h'(p)) = \frac{1}{p} + h'(p)$$

car pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\varphi'(t+1) - \varphi'(t) = \dfrac{1}{t}$. On en déduit :

$$h'(p) - \frac{1}{p} \leqslant h'(x+p) \leqslant h'(p) + \frac{1}{p} \text{ donc } -\frac{1}{p} \leqslant h'(x+p) - h'(p) \leqslant \frac{1}{p}.$$

Ainsi :

$$\boxed{|h'(x+p) - h'(p)| \leqslant \frac{1}{p}.}$$

Q10. Soit $x \in]0,1]$.
D'après **Q5**, la fonction h' est 1-périodique sur $]0,+\infty[$ donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $h'(x+p) = h'(x)$ et $h'(p) = h'(1)$ (par récurrence).
Par la question précédente, on a donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$|h'(x) - h'(1)| \leqslant \frac{1}{p}.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, on en déduit que $0 \leqslant |h'(x) - h'(1)| \leqslant 0$ d'où $h'(x) = h'(1)$.
La fonction h' est donc constante sur $]0,1]$.
Comme elle est de plus 1-périodique, on en déduit

$$\boxed{\text{la fonction } h' \text{ est constante sur }]0,+\infty[.}$$

Q11. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $h'(x) = a$.
En intégrant, on en déduit qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $h(x) = ax + b$.
Comme $h(2) = h(1)$ d'après **Q5**, on a $2a + b = a + b$ d'où $a = 0$.
De plus, par la condition (iv), $h(1) = \varphi(1) - g(1) = 0 - 0 = 0$ d'où $b = 0$.
On en déduit que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $h(x) = 0$ d'où :

$$\boxed{\varphi = g.}$$

Exercice 3 *Source : E3A PC 2017*

Q12. On a $A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Toutes les colonnes de A_0 sont colinéaires à la première colonne qui est non nulle donc :

$$\boxed{A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{rg}(A_0) = \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1)\right) = 1.}$$

Q13. On a $\mathrm{rg}(A_0 - 0I_4) = 1 < 4$ donc $\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } A_0.}$
On a de plus par le théorème du rang, $\dim(E_0) = \dim\left(\mathrm{Ker}(A_0)\right) = \dim\left(\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})\right) - \mathrm{rg}(A_0) = 4 - 1 = 3$.

On constate que $A_0\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = 0_{4,1}$, $A_0\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 0_{4,1}$ et $A_0\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = 0_{4,1}$.

Notons $U_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Ainsi, la famille (U_1, U_2, U_3) est une famille de vecteurs de E_0, libre car échelonnée et de cardinal $3 = \dim(E_0)$.

On en déduit que :

$$\boxed{(U_1, U_2, U_3) \text{ est une base de } E_0.}$$

Q14. On a $A_0U_0 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1 & -1\\1 & 1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1 & 1\\-1 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\\-2\end{pmatrix} = -2U_0$.

On a par ailleurs $\operatorname{tr}(A_0) = -1 + 1 - 1 - 1 = -2$.

$$\boxed{A_0U_0 = -2U_0 \text{ et } \operatorname{tr}(A_0) = -2.}$$

Q15. On a $A_0U_0 = -2U_0$ avec $U_0 \neq 0_{4,1}$ donc -2 est une valeur propre de A_0.

Comme $\dim(E_{-2}) \geqslant 1$, on a $\dim(E_0) + \dim(E_{-2}) \geqslant 4$.

Or, la somme des dimensions des sous-espaces propres ne peut pas excéder l'ordre de la matrice A_0 c'est-à-dire 4 donc on en déduit que $\dim(E_0) + \dim(E_{-2}) = 4$.

Cela prouve que :

$$\boxed{A_0 \text{ est diagonalisable dans } \mathscr{M}_4(\mathbb{R}).}$$

Q16. On a donc $\dim(E_{-2}) = 4 - \dim(E_0) = 4 - 3 = 1$.

Comme $A_0U_0 = -2U_0$, on a $U_0 \in E_{-2}$.

La famille (U_0) est donc une famille de E_{-2}, libre car constituée d'un seul vecteur non nul et de cardinal $1 = \dim(E_{-2})$.

On en déduit que c'est une base de E_{-2}.

D'après Q15, A_0 est diagonalisable et on a $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = E_{-2} \oplus E_0$.

En concaténant les bases obtenues pour E_{-2} et E_0, on obtient la famille $\mathscr{B} = (U_0, U_1, U_2, U_3)$ qui est donc une base de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Notons $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à A_0 c'est-à-dire l'application définie pour tout $X \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ par $\varphi(X) = A_0X$.

La matrice de φ dans la base $\mathscr{C}$ est A_0 et la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ est $D = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ car $\varphi(U_0) = -2U_0$, $\varphi(U_1) = 0U_1$, $\varphi(U_2) = 0U_2$ et $\varphi(U_3) = 0U_3$.

En notant $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\-1 & -1 & 0 & 0\\-1 & 0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$, on a P inversible et par les relations de changement de base, $A_0 = PDP^{-1}$.

$$\boxed{\text{En notant } P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\-1 & -1 & 0 & 0\\-1 & 0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \text{ on a } A_0 = PDP^{-1}.}$$

Q17. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice A.
Comme C est une colonne de A, on a $\mathrm{Vect}(C) \subset \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)$.
Comme $C \neq 0_{n,1}$, on a de plus $\dim(\mathrm{Vect}(C)) = 1$ et $\dim(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n)) = \mathrm{rg}(A) = 1$.
On en déduit que $\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_n) = \mathrm{Vect}(C)$.
Ainsi, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $C_j \in \mathrm{Vect}(C)$ donc il existe $\ell_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = \ell_j C$.
Notons $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix}$.
La matrice A s'écrit alors en colonne :

$$A = \left(\ell_1 C \mid \ell_2 C \mid \cdots \mid \ell_n C \right) = C \times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix} = CL.$$

On a de plus $L \neq 0_{1,n}$ car sinon A serait la matrice nulle donc ne serait pas de rang 1.

$$\boxed{\text{Il existe } C \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \text{ toutes deux non nulles telles que } A = CL.}$$

Q18. On constate alors que $A = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix} = \left(c_i \ell_j \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

On a donc $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} c_i \ell_i$. Par ailleurs, on a $LC = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i \right)$.

On en déduit que $LC = \mathrm{tr}(A)$.
De plus, $A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = C \underbrace{(\mathrm{tr}(A))}_{\in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})} L = \mathrm{tr}(A) CL = \mathrm{tr}(A) A$.

$$\boxed{LC = \mathrm{tr}(A) \text{ et } A^2 = \mathrm{tr}(A) A.}$$

Q19. On a $A^2 - \mathrm{tr}(A) A = 0_n$ donc $X^2 - \mathrm{tr}(A) X$ est un polynôme annulateur de A.
On a $X^2 - \mathrm{tr}(A) X = X(X - \mathrm{tr}(A))$ donc ses racines sont 0 et $\mathrm{tr}(A)$.
On en déduit par le cours que :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, \mathrm{tr}(A)\}.}$$

Q20. On a $\mathrm{rg}(A - 0 I_n) = 1 < n$ donc $\boxed{0 \text{ est une valeur propre de } A}$ et on a par le théorème du rang :

$$\boxed{\dim(E_0) = n - 1.}$$

Q21. En s'inspirant de ce qui a été fait dans la partie 1, on peut calculer AC.
On a $AC = (CL)C = C(LC) = C(\mathrm{tr}(A)) = \mathrm{tr}(A) C$ avec $C \neq 0_{n,1}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) \text{ est valeur propre de } A.}$$

Q22. Si $\mathrm{tr}(A) = 0$ alors d'après les questions précédentes, 0 est la seule valeur propre de A.
Comme $\dim(E_0) = n - 1 \neq n$, la somme des dimensions des sous-espaces propres n'est pas égale à n donc la matrice A n'est pas diagonalisable.
Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$ alors le polynôme $X(X - \mathrm{tr}(A))$ est un polynôme scindé à racines simples et on a vu qu'il est annulateur de A. On en déduit que A est diagonalisable.
On a ainsi montré l'équivalence :

$$\boxed{A \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \mathrm{tr}(A) \neq 0.}$$

Q23. Raisonnons par l'absurde : supposons que $f(u) = 0_E$.
Soit $x \in E$. Comme $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$ avec $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha u$.
On a donc $f \circ f(x) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = 0_E$.

On a donc pour tout $x \in E$, $f \circ f(x) = 0_E$ c'est-à-dire $f \circ f = \tilde{0}$ ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé.
Ainsi :

$$\boxed{f(u) \neq 0_E.}$$

Q24. On a $f(u) \in \mathrm{Im}(f)$ avec $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \alpha u$.
Comme $u \neq 0_E$ (car sinon on aurait $\mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$ donc f ne serait pas de rang 1), on en déduit que α est une valeur propre de f.
De plus, $\alpha \neq 0$ car sinon on aurait $f(u) = 0_E$.
Ainsi :

$$\boxed{f \text{ possède une valeur propre réelle non nulle.}}$$

Q25. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Notons A la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
On a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(f) = 1$ et $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A) = \{0, \mathrm{tr}(A)\}$ d'après l'étude de la partie 2.
Comme f possède une valeur propre α réelle non nulle, on a nécessairement $\alpha = \mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.
D'après Q22, la matrice A est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme diagonalisable.}}$$

Exercice 4 *Source : E4A 2002*

Q26. Soit $x \in [0, +\infty[$.
Si $x = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = 0$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.
Si $x > 0$ alors $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^{\alpha+1}x^2} = \dfrac{1}{n^{\alpha+1}x}$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^{\alpha+1}x} \geqslant 0$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge car c'est une série de Riemann avec $\alpha+1 > 1$.
Par comparaison, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge simplement sur } [0, +\infty[.}$$

Q27. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction u_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$u_n'(x) = \frac{1}{n^\alpha} \frac{1 + nx^2 - 2nx^2}{(1 + nx^2)^2} = \frac{1 - nx^2}{n^\alpha(1 + nx^2)^2} \text{ du signe de } 1 - nx^2.$$

On en déduit que u_n est croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{n}}, +\infty\right[$.
Comme u_n est positive sur $[0, +\infty[$, on en déduit que $|u_n| = u_n$ admet un maximum sur $[0, +\infty[$, atteint en $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
On a donc $\|u_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |u_n(x)| = u_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1}{2n^{\alpha+1/2}}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \|u_n\|_\infty^{[0,+\infty[} = \frac{1}{2n^{\alpha+1/2}}.}$$

Q28. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|u_n\|_\infty^{[0,+\infty[}$ converge si et seulement si $\alpha + \dfrac{1}{2} > 1$ c'est-à-dire $\alpha > \dfrac{1}{2}$ (série de Riemann).
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ converge normalement sur } [0, +\infty[\text{ si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

Q29. D'après la question 27, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction u_n est bornée sur $[0, +\infty[$ donc sur $[a, b]$. Montrons que la série $\sum_{n \geqslant 1} \|u_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge.

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, pour n assez grand on a $\frac{1}{\sqrt{n}} < a < b$ donc d'après l'étude faite en Q27, la fonction u_n est décroissante et positive sur $[a, b]$ donc $\|u_n\|_\infty^{[a,b]} = u_n(a)$.
D'après Q26, la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n(a)$ converge. On en déduit que la série $\sum_{n \geqslant 1} \|u_n\|_\infty^{[a,b]}$ converge (la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes).
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} u_n \text{ converge normalement sur } [a, b].}$$

Q30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1, +\infty[$.
On a $1 + nx^2 \geqslant nx^2 > 0$ donc :

$$|u_n(x)| = \frac{x}{n^\alpha (1 + nx^2)} \leqslant \frac{x}{n^{\alpha+1} x^2} = \frac{1}{n^{\alpha+1} x} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+1}}.$$

Ainsi, $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ est un majorant de l'ensemble $\{|u_n(x)|, x \in [1, +\infty[\}$ et $\|u_n\|_\infty^{[1,+\infty[}$ est le plus petit des majorants de cet ensemble donc :

$$0 \leqslant \|u_n\|_\infty^{[1,+\infty[} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+1}}.$$

De plus, la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge car $\alpha + 1 > 1$.
On en déduit par comparaison que la série $\sum_{n \geqslant 1} \|u_n\|_\infty^{[1,+\infty[}$ converge.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geqslant 1} u_n \text{ converge normalement sur } [1, +\infty[.}$$

Q31.(a) On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2n + 1$, $u_k(x) \geqslant 0$ donc $\sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x) \geqslant 0$.
Ainsi :

$$R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x).$$

De plus, pour tout $k \in [\![n + 1, 2n]\!]$, on a $0 < k^\alpha \leqslant (2n)^\alpha \leqslant \sqrt{2n}$ car la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et $2n \geqslant 1$ avec $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$.
Par suite :

$$\boxed{R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1 + kx^2)}.}$$

Q31.(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$R_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n\left(1 + \frac{k}{2n}\right)}.$$

Or, pour tout $k \in [\![n + 1, 2n]\!]$, on a $0 < 1 + \frac{k}{2n} \leqslant 2$ donc $\frac{1}{2n\left(1 + \frac{k}{2n}\right)} \geqslant \frac{1}{4n}$.
On en déduit que :

$$R_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{4n} = \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, la suite $\left(R_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0.
De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = 0$, à partir d'un certain rang, les termes de la suite appartiennent à $[0,a]$.
On a ainsi trouvé une suite (x_n) d'élements de $[0,a]$ telle que la suite $(R_n(x_n))$ ne converge pas vers 0.
On en déduit que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément sur $[0,a]$ vers la fonction nulle.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n\geqslant 1} u_n \text{ ne converge pas uniformément sur } [0,a].}$$

Q32. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $]0,+\infty[$ car c'est une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$.
Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0<a<b$.
D'après Q29, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[a,b]$.
On en déduit que la fonction $S_{|[a,b]}$ est continue sur $[a,b]$.
Ceci étant vrai sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$, on en déduit que :

$$\boxed{\text{la fonction } S \text{ est continue sur }]0,+\infty[\text{ (propriété locale).}}$$

Q33. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction u_n est continue sur $[0,+\infty[$.
D'après Q28, pour $\alpha > \frac{1}{2}$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,+\infty[$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{si } \alpha > \frac{1}{2} \text{ alors la fonction } S \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

Q34.(a) La fonction $t\mapsto x\sqrt{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,n]$ donc on peut poser $u = x\sqrt{t}$.
On a $\mathrm{d}u = \frac{x}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$. Lorsque $t=1$ alors $u=x$ et lorsque $t=n$ alors $u=x\sqrt{n}$.
On obtient alors :

$$\int_1^n \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\mathrm{d}t = \int_x^{x\sqrt{n}} \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u = 2[\mathrm{Arctan}(u)]_x^{x\sqrt{n}} = 2\big(\mathrm{Arctan}(x\sqrt{n}) - \mathrm{Arctan}(x)\big).$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Arctan}(x\sqrt{n}) = \frac{\pi}{2}$ car $x>0$.
On en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\mathrm{d}t = \pi - 2\mathrm{Arctan}(x).}$$

Q34.(b) La fonction $t\mapsto \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}$ est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$.
On a donc pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_k^{k+1} \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}.$$

Soit $N\in\mathbb{N}^*$. En sommant pour k allant de 1 à N, on obtient :

$$\sum_{k=1}^N \frac{x}{k^\alpha(1+kx^2)} \geqslant \int_1^{N+1} \frac{x}{t^\alpha(1+tx^2)}\mathrm{d}t \geqslant \int_1^{N+1} \frac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}\mathrm{d}t$$

car pour tout $t\geqslant 1$, on a $0<t^\alpha\leqslant t^{1/2}$.
Par passage à la limite $N\to+\infty$ (décalage d'indice), on obtient :

$$\boxed{S(x) \geqslant \pi - 2\mathrm{Arctan}(x).}$$

Q34.(c) On a $S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0) = 0$. Or, $\lim_{x\to 0}\big(\pi - 2\text{Arctan}(x)\big) = \pi$.
D'après l'inégalité ci-dessus, on ne peut donc pas avoir $\lim_{x\to 0} S(x) = S(0)$ (on obtiendrait une absurdité par passage à la limite).
Ainsi :

$$\boxed{S \text{ n'est pas continue en } 0.}$$

Q35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^{\alpha+1}x^2} = \dfrac{1}{n^{\alpha+1}x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \in \mathbb{R}$.
D'après Q30, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement et donc uniformément sur $[1, +\infty[$.
Par le théorème de la double-limite, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0.}$$