DEVOIR SURVEILLÉ 3 – Sujet niveau 2 28/11/25 Durée 4h

Problème 1 : Autour des matrices de Toeplitz

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a \leqslant b$, $[\![a,b]\!]$ désigne l'ensemble $\{a, a+1, \dots, b-1, b\}$. $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si $(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$, on note $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})$ la matrice

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}.$$

Une telle matrice est appelée *matrice de Toeplitz* d'ordre n. On nomme $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists\, (t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}, M = T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) \right\}.$$

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.
Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ ($p \in \mathbb{N}$) est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $P(M)$ désigne la matrice

$$P(M) = a_0 I_n + a_1 M + \cdots + a_p M^p.$$

Le but de ce problème est l'étude de certaines propriétés des matrices de Toeplitz. La partie I traite de généralités sur les matrices de Toeplitz et de quelques exemples. La partie II, indépendante de la partie I, étudie un type particulier de matrices de Toeplitz - les matrices circulantes - en s'intéressant à leur structure et à leur diagonalisabilité.

I. Généralités et quelques exemples

I.A - Généralités

Q1. Montrer que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En donner une base et en préciser la dimension.

Q2. Montrer que si deux matrices A et B commutent ($AB = BA$) et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, alors $P(A)$ et $Q(B)$ commutent.

I.B - Cas de la dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz de taille 2×2, où (a, b, c) sont des complexes.

Q3. Donner le polynôme caractéristique de A.

Q4. Discuter, en fonction des valeurs de (a, b, c), de la diagonalisabilité de A.

Réduction d'une matrice sous forme de Toeplitz

Q5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.

Q6. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

I.C - Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de la forme $T(0,\dots,0,t_{-1},t_0,t_1,0,\dots,0)$, i.e. une matrice de la forme

$$A_n(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a,b,c) sont des complexes.
On fixe (a,b,c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$.
On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a,b,c)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a,b,c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

Q7. Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1,\dots,x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0, x_{n+1} = 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0.$$

Q8. Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation

$$bx^2 + (a-\lambda)x + c = 0. \tag{I.1}$$

Q9. À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que (I.1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.

Q10. Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que r_1/r_2 appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.

Q11. En utilisant l'équation (I.1) satisfaite par r_1 et r_2, déterminer r_1r_2 et $r_1 + r_2$.
En déduire qu'il existe un entier $\ell \in [\![1,n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que

$$\lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right).$$

Q12. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $[\![0,n+1]\!]$, $x_k = 2\mathrm{i}\alpha\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.

Q13. Conclure que $A_n(a,b,c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

II. Matrices circulantes

Une matrice circulante est une matrice de Toeplitz $T\left(t_{-n+1},\dots,t_0,\dots,t_{n-2},t_{n-1}\right)$, pour laquelle

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad t_k = t_{-n+k}.$$

Elle est donc de la forme

$$T\left(t_1,t_2,\dots,t_0,t_1,\dots,t_{n-2},t_{n-1}\right) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & t_{n-2} \\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}.$$

On pose $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $\omega_n = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$.

Q14. Calculer $M_n^2,\dots,M_n^n$. Montrer que M_n est inversible et donner un polynôme annulateur de M_n.

Q15. Justifier que M_n est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres (exprimées à l'aide de ω_n) et donner une base de vecteurs propres de M_n.

Q16. On pose $\Phi_n = \left(\omega_n^{(p-1)(q-1)}\right)_{1\leqslant p,q\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que Φ_n est inversible et donner sans calcul la valeur de la matrice $\Phi_n^{-1}M_n\Phi_n$.

Q17. Soit A une matrice circulante. Donner un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$.

Q18. Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer, à l'aide d'une division euclidienne de P par un polynôme bien choisi, que $P(M_n)$ est une matrice circulante.

Q19. Montrer que l'ensemble des matrices circulantes est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$, stable par produit et par transposition.

Q20. Montrer que toute matrice circulante est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

Problème 2 : Modèle SIR pour la propagation d'épidémie et séries de Dirichlet

Notations

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$.

- L'ensemble $\mathcal{C}^k(J,\mathbf{R})$ avec $k \in \mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des fonctions $f : J \to \mathbf{R}$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre k existent et telles que $f^{(k)}$ soit continue sur J.
- L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(J,\mathbf{R})$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur J.
- Si $f : J \to \mathbf{R}$ est une fonction bornée, on note

$$\|f\|_{\infty,J} = \sup\{|f(x)|, x \in J\}.$$

Introduction

Dans ce sujet, on étudie l'équation différentielle non linéaire

$$(E): \quad y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2} e^{y(x)},$$

dont l'inconnue est une fonction $y : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. On montrera en partie V que cette équation peut être utilisée pour caractériser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus.

On admet dans tout le sujet que le problème de Cauchy

$$(C): \quad \begin{cases} y'(x) + y(x) + 1 = \frac{1}{2} e^{y(x)} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

admet une unique solution $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ que l'on va chercher à approcher de plusieurs manières.

Partie I. Linéarisation de (E)

Pour approcher la solution y du problème de Cauchy (C), on propose dans un premier temps de linéariser l'équation (E). Comme y est continue et vérifie $y(0) = 0$, on remarque au voisinage de 0 que

$$\exp(y(x)) \approx 1 + y(x).$$

On propose donc d'approcher y par la solution de l'équation différentielle linéaire

$$(E_\ell): \quad u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)),$$

dont l'inconnue est une fonction $u : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$. On introduit de même le problème de Cauchy associé

$$(C_\ell): \quad \begin{cases} u'(x) + u(x) + 1 = \frac{1}{2}(1 + u(x)) \\ u(0) = 0 \end{cases}.$$

Q1. Justifier qu'il existe une unique solution u au problème de Cauchy (C_ℓ), donner son expression et dresser son tableau de variations.

Q2. Montrer qu'il existe une unique solution constante de l'équation (E_ℓ), notée $\gamma \in \mathbf{R}$, et vérifier que la solution u trouvée en question 1 satisfait

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \gamma.$$

On admet à présent dans toute la suite du sujet que les propriétés observées sur u, la solution de (C_ℓ), restent vérifiées sur y, la solution de (C). En particulier, on admet que :

- y est décroissante sur $\mathbf{R}_+$,
- $\lim_{x \to +\infty} y(x) = c$, où $c \in \mathbf{R}$.

Partie II. Séries de Dirichlet

On propose dans cette partie d'étudier des séries de fonctions particulières appelées séries de Dirichlet.

Définition 1 Une série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ est dite de Dirichlet si

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad f_n(x) = a_n e^{-\lambda_n x},$$

où la suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie, pour une valeur donnée $M \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |a_n| \leqslant \frac{M}{2^n},$$

et la suite de réels $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante et vérifie

$$\lambda_0 = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty, \quad \text{et} \quad \lambda_n \underset{n\to+\infty}{=} O(n).$$

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on définit alors la quantité $b_k = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^k a_n$.

Q3. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, les réels b_k sont bien définis.

Q4. Montrer que toute série de Dirichlet $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}_+$. On note alors f sa somme. Justifier que f est continue sur $\mathbf{R}_+$.

Q5. Exprimer $f(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ en fonction de a_0 et b_0.

Q6. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $f \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ et donner une expression de $x \mapsto f^{(k)}(x)$. Exprimer ensuite $f^{(k)}(0)$ en fonction de b_k.

Q7. Montrer que si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ alors $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Partie III. Relations sur les coefficients de la série de Dirichlet

Revenons au problème de Cauchy (C), et à l'étude de sa solution $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$. Supposons dorénavant que y est la somme d'une somme de Dirichlet, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x},$$

où les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifient les propriétés mentionnées en définition 1. On introduit également la fonction $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad g(x) = e^{y(x)}.$$

Q8. Exprimer a_0 et b_0 en fonction de la constante c introduite en partie I.

Q9. En utilisant l'équation (E) satisfaite par y, calculer b_1.

Q10. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$g^{(k)}(0) = (-1)^k d_k,$$

où les coefficients d_k sont définis par

$$d_0 = 1, \qquad \text{et} \qquad \forall k \geqslant 1 \quad d_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i.$$

Q11. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. En utilisant l'équation (E), satisfaite par y, exhiber une relation de récurrence liant b_{k+1}, b_k et d_k.

Partie IV. Approximation de la solution y

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Pour approcher la solution y de (C), on propose dans cette partie de tronquer toutes le sommes en s'arrêtant au terme de rang N. Les résultats de la partie III permettent d'obtenir une approximation des quantités β_k définies pour tout $k \in \mathbf{N}$ par

$$\beta_k = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^k a_n.$$

On introduit également la fonction tronquée $y_N : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\lambda_n x}.$$

En se donnant les valeurs de la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on veut dans cette partie calculer les valeurs des coefficients a_n pour n de 1 à N. On utilisera les notations

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N, \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^N.$$

Q12. Montrer que

$$\|y_N - y\|_{\infty, \mathbf{R}_+} \leqslant \frac{M}{2^N},$$

et déduire que (y_N) converge uniformément vers y sur $\mathbf{R}_+$. Proposer ensuite un intervalle $J \subset \mathbf{R}_+$ où la majoration de $\|y_N - y\|_{\infty, J}$ serait plus fine.

Q13. Montrer que $VA = B$ où $V \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ est une matrice que l'on explicitera.

Q14. Prouver que le système $VA = B$ admet une unique solution $A \in \mathbf{R}^N$.

Partie V. Modèle de propagation d'épidémie SIR

Pour modéliser la propagation d'une épidémie non létale au sein d'une population d'individus, on peut utiliser le modèle de propagation d'épidémie appelé SIR. Dans ce modèle, la population est séparée en trois groupes :

- Le groupe des personnes susceptibles, n'ayant pas attrapé la maladie, est noté S et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $S \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.
- Le groupe des personnes infectées par la maladie est noté I et sa proportion au cours du temps est représentée par la fonction $I \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.
- Le groupe des personnes ayant contracté la maladie puis récupéré est noté R. On suppose qu'un individu ne peut attraper la maladie qu'une seule fois dans sa vie. Une fois dans le groupe des individus récupérés, il y reste définitivement et ne redevient jamais susceptible. La proportion du groupe R au cours du temps est représentée par la fonction $R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$.

On a ainsi la relation

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad S(x) + I(x) + R(x) = 1.$$

Dans un modèle de propagation d'épidémie SIR, ces trois fonctions sont de plus des solutions d'un problème de Cauchy associé à un système d'équations différentielles non linéaires

$$(F) : \quad \begin{cases} S'(x) = -I(x)S(x) \\ I'(x) = I(x)S(x) - I(x) \\ R'(x) = I(x) \qquad S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0 \end{cases},$$

où $S_0, I_0, R_0 \in [0,1]$ sont les conditions initiales. On admet dans la suite le résultat suivant :

Théorème 1 Pour (S_0, I_0, R_0) fixé, le problème de Cauchy (F) admet une unique solution $(S, I, R) \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}))^3$. De plus, si (S, I, R) et $(\tilde{S}, \tilde{I}, \tilde{R})$ sont les solutions associées aux conditions initiales (S_0, I_0, R_0) et $(\tilde{S}_0, \tilde{I}_0, \tilde{R}_0)$, alors

$$(S_0, I_0, R_0) \neq (\tilde{S}_0, \tilde{I}_0, \tilde{R}_0) \quad \Rightarrow \quad \forall x \in \mathbf{R}_+ \quad (S(x), I(x), R(x)) \neq (\tilde{S}(x), \tilde{I}(x), \tilde{R}(x)).$$

Q15. On suppose $S_0 = 0$. Donner l'expression du triplet solution (S, I, R) du système (F).

Q16. Montrer que si $S_0 > 0$ alors la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) ne s'annule jamais, et en déduire que S est strictement positive.

Q17. Supposons que $S_0 > 0$. Montrer que la fonction S du triplet solution (S, I, R) de (F) vérifie la relation

$$\left(-\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}.$$

On se place à partir de maintenant dans le cas où $S_0 = \frac{1}{2}$, $I_0 = \frac{1}{2}$ et $R_0 = 0$. On introduit de plus la fonction $h : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad h(x) = \ln\left(\frac{S(x)}{S_0}\right) = \ln(2S(x)).$$

Q18. Montrer que h est solution du problème de Cauchy (C).

Pour approcher la fonction S, on introduit la fonction $S_N : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ \quad S_N(x) = S_0 e^{y_N(x)} = \frac{1}{2} \exp\left(\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\lambda_n x}\right).$$

Q19. Montrer que (S_N) converge uniformément vers S sur $\mathbf{R}_+$ quand $N \to +\infty$ et que

$$\|S_N - S\|_{\infty,\mathbf{R}_+} \leqslant \frac{Me^{2M}}{2^{N+1}}.$$