CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ 3 - Sujet 2

Problème 1 - Autour des matrices de Toeplitz (extrait Centrale PSI 2018)

I. Généralités et quelques exemples

I.A. Généralités

Q1. Pour tout $k \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, notons D_k la matrice de Tœplitz $T(t_{-n+1}, ..., t_{n-1})$ où $t_k = 1$ et pour tout $i \in [\![-(n-1), n-1]\!] \setminus \{k\}$, $t_i = 0$.
On a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) &= \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1},\ M = \sum_{k=-n+1}^{n-1} t_k D_k\} \\ &= \mathrm{Vect}(D_{-n+1}, \ldots, D_{n-1}).\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$ et $(D_{-n+1}, \ldots, D_{n-1})$ en est une famille génératrice.
De plus, cette famille est libre car s'il existe $(t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$ tel que $\sum_{k=-n+1}^{n-1} t_k D_k = 0_n$ alors on a $T(t_{-n+1}, \ldots, t_0, \ldots, t_{n-1}) = 0_n$ donc en regardant la première colonne et la première ligne de la matrice, on en déduit que pour tout $k \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, $t_k = 0$.
On en déduit que $\boxed{(D_{-n+1}, \ldots, D_{n-1}) \text{ est une base de } \mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})}$.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{Card}(D_{-n+1}, \ldots, D_{n-1}) = n - 1 - (-n+1) + 1$ donc $\boxed{\dim(\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})) = 2n - 1.}$

Q2. On suppose que A et B sont deux matrices qui commutent.
Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Notons $P = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k X^k$ où $d \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_0, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$.
Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k B = BA^k$.
C'est vrai pour $k = 0$ car $A^0 B = I_n B = B = BI_n = BA^0$ et si $k \in \mathbb{N}$ vérifie $A^k B = BA^k$ alors $A^{k+1} B = A(A^k B) = A(BA^k) = (AB)A^k = (BA)A^k = BA^{k+1}$.
On a alors :

$$P(A)B = \left(\sum_{k=0}^{d} \alpha_k A^k\right) B = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k (A^k B) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k (BA^k) = B \left(\sum_{k=0}^{d} \alpha_k A^k\right) = BP(A).$$

On a ainsi prouvé que si A et B commutent alors tout polynôme en A commute avec B.
Appliquons ce résultat avec B et $P(A)$ (qui commutent) : tout polynôme en B commute avec $P(A)$ donc $Q(B)$ et $P(A)$ commutent.

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ commutent alors tout polynôme en } A \text{ commute avec tout polynôme en } B.}$$

I.B. Cas de la dimension 2

Q3. Comme il s'agit d'une matrice 2×2, on a directement :

$$\boxed{\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2aX + a^2 - bc.}$$

Q4. Le polynôme χ_A est un polynôme de degré 2 qui a pour discriminant $\Delta = 4a^2 - 4(a^2 - bc) = 4bc$.
⋆ Si $bc \neq 0$ alors χ_A admet deux racines complexes distinctes donc χ_A est scindé sur $\mathbb{C}[X]$ à racines

simples, donc la matrice A est diagonalisable.
⋆ Si $bc = 0$ alors χ_A admet une racine double qui vaut a.
On sait alors que A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_a) = 2$ c'est-à-dire si et seulement si $\mathrm{Ker}(A - aI_2) = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ c'est-à-dire si et seulement si $A = aI_2$.
Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si $b = c = 0$.
On en conclut que :

$$\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable si et seulement si } b \text{ et } c \text{ sont tous les deux non nuls ou tous les deux nuls.}}$$

Q5. On sait que le polynôme caractéristique est de degré 2 et il est scindé sur $\mathbb{C}$.
⋆ Si χ_M admet deux valeurs propres α et β distinctes alors la matrice M est diagonalisable et donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
⋆ Considérons maintenant le cas où χ_M admet une valeur propre double α.
Notons φ_M l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à M.
On considère un vecteur propre X de M associé à la valeur propre α. En complétant la famille libre (X) (puisque $X \neq 0_{2,1}$) en une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$, on obtient une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ dans laquelle la matrice de φ_M s'écrit $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. On trouve deux fois α sur la diagonale car M et cette matrice sont semblables puisqu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases et elles ont donc le même polynôme caractéristique.

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de type } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ où } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3,\ \alpha \neq \beta.}$$

Q6. Par la question précédente et par transitivité de la relation de similitude, il suffit de prouver que toute matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec $\alpha \neq \beta$ et toute matrice du type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice de Tœplitz.
C'est évident pour la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ car il s'agit d'une matrice de Tœplitz : $T(0, \alpha, \gamma)$.
Montrons que $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, où $\alpha \neq \beta$, est semblable une matrice de Tœplitz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.
Analyse : Si ces deux matrices sont semblables alors elles sont la même trace donc $2a = \alpha + \beta$ donc $a = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$. Elles sont aussi le même déterminant donc $a^2 - bc = \alpha\beta$ donc $bc = \left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \alpha\beta$.
Synthèse : Considérons la matrice de Toeplitz $T = T\left(1, \dfrac{\alpha + \beta}{2}, \left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \alpha\beta\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha + \beta}{2} & \left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \alpha\beta \\ 1 & \dfrac{\alpha + \beta}{2} \end{pmatrix}$.
On a $\chi_T = X^2 - \mathrm{tr}(T)X + \det(T) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta = (X - \alpha)(X - \beta)$.
Comme $\alpha \neq \beta$, le polynôme χ_T est scindé à racines simples donc T est diagonalisable et donc semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ puisque $\mathrm{Sp}(T) = \{\alpha, \beta\}$.
On a donc prouvé que :

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de Tœplitz.}}$$

I.C. Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Q7. Comme X est un vecteur propre de $A_n(a, b, c)$ associé à la valeur propre λ, on a l'égalité matricielle $A_n(a, b, c)X = \lambda X$.
Écrivons cette égalité de deux matrices colonnes cœfficient par cœfficient.
- Pour le cœfficient de la première ligne : on a $ax_1 + bx_2 = \lambda x_1$ donc $bx_2 + (a - \lambda_1)x_1 + cx_0 = 0$ en posant $x_0 = 0$.

- Pour les cœfficients de la ligne numéro $k+1$ pour k allant de 1 à $n-2$: on a $cx_k+ax_{k+1}+bx_{x+2} = \lambda x_{k+1}$ donc $bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$.
- Pour le cœfficient de la dernière ligne : on a $cx_{n-1} + ax_n = \lambda x_n$ donc $bx_{n+1} + (a-\lambda)x_n + cx_{n-1} = 0$ en posant $x_{n+1} = 0$.

On a donc ainsi obtenu pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$.
On peut alors étendre la famille finie $(x_0, \dots, x_{n+1})$ en une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence souhaitée, en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant n$, $x_{k+2} = \dfrac{1}{b}((\lambda-a)x_{k+1} - cx_k)$ (on a bien $b \neq 0$ puisque $bc \neq 0$).

$$\boxed{\text{En posant } x_0 = x_{n+1} = 0,\ (x_1, \dots, x_n) \text{ sont les termes d'une suite } (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ vérifiant pour tout } k \in \mathbb{N} : bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0.}$$

Q8. La relation $(I.1)$ est l'équation caractéristique de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ récurrente linéaire d'ordre 2 (on a $b \neq 0$).
On sait alors d'après le cours que :
- $\boxed{\text{si elle possède deux racines complexes distinctes } r_1 \text{ et } r_2}$ alors il existe deux constantes complexes A et B telles que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ x_k = Ar_1^k + Br_2^k}$,
- $\boxed{\text{si elle possède une unique racine double } r_0}$ alors il existe deux constantes complexes A et B telles que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ x_k = (Ak+B)r_0^k}$.

Q9. Raisonnons par l'absurde en supposant que l'équation $(I.1)$ admet une unique solution r_0. Comme $c \neq 0$, on remarque que 0 n'est pas solution de $(I.1)$ donc $r_0 \neq 0$.
Par la question précédente, on sait qu'il existe alors deux constantes complexes A et B telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = (Ak+B)r_0^k$.
Comme $x_0 = 0$, on obtient $B = 0$ et comme $x_{n+1} = 0$, on obtient $(n+1)Ar_0^{n+1} = 0$ d'où $A = 0$ puisque $r_0 \neq 0$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = 0$ donc en particulier, $X = 0_{n,1}$, ce qui est absurde car il s'agit d'un vecteur propre.
Ainsi :

$$\boxed{\text{L'équation } (I.1) \text{ possède deux solutions distinctes } r_1 \text{ et } r_2.}$$

Q10. Comme vu à la question précédente, 0 n'est pas une racine de $(I.1)$ donc $\boxed{r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont non nuls}}$.
Par la question 8, il existe deux constantes complexes A et B telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = Ar_1^k+Br_2^k$.
Comme $x_0 = 0$, on a $B = -A$ et comme $x_{n+1} = 0$, on a $A(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0$.
Or, A ne peut pas être nul car sinon, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ serait la suite nulle et on aurait $X = 0_{n,1}$, ce qui n'est pas possible en tant que vecteur propre.
On en déduit que $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$ d'où $\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$.
Ainsi :

$$\boxed{\frac{r_1}{r_2} \text{ appartient à } \mathbb{U}_{n+1}.}$$

Q11. On utilise les relations cœfficients/racines que l'on peut retrouver comme suit. On a :

$$bX^2 + (a-\lambda)X + c = b(X-r_1)(X-r_2) = bX^2 - b(r_1+r_2)X + br_1r_2.$$

Par unicité des cœfficients dans la base canonique, on obtient (puisque $b \neq 0$) :

$$\boxed{r_1r_2 = \frac{c}{b} \text{ et } r_1 + r_2 = \frac{\lambda - a}{b}.}$$

Comme $\dfrac{r_1}{r_2}$ appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$, il existe $\ell \in [\![0, n]\!]$ tel que $\dfrac{r_1}{r_2} = e^{2i\ell\pi/(n+1)}$.
Remarquons que $\ell \neq 0$ car sinon, on aurait $\dfrac{r_1}{r_2} = 1$ donc $r_1 = r_2$, impossible par la question 9.

On a alors :

$$\begin{aligned}\lambda &= a + b(r_1 + r_2) = a + br_2\left(\frac{r_1}{r_2} + 1\right)\\ &= a + br_2\left(e^{2i\ell\pi/(n+1)} + 1\right) = a + br_2e^{i\ell\pi/(n+1)}\left(e^{i\ell\pi/(n+1)} + e^{-i\ell\pi/(n+1)}\right)\\ &= a + 2br_2e^{i\ell\pi/(n+1)}\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)\end{aligned}$$

en posant $\rho = br_2e^{i\ell\pi/(n+1)}$.
On a de plus $\rho^2 = b^2r_2^2e^{2i\ell\pi/(n+1)} = b^2r_2^2\frac{r_1}{r_2} = b^2r_1r_2 = b^2\frac{c}{b} = bc$.
Ainsi :

$$\boxed{\text{il existe } \ell \in [\![1, n+1]\!] \text{ et } \rho \in \mathbb{C} \text{ vérifiant } \rho^2 = bc \text{ tels que } \lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right).}$$

Q12. Avec les notations précédentes, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}x_k &= A(r_1^k - r_2^k) = Ar_2^k\left(\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^k - 1\right) = Ar_2^k(e^{2i\ell k\pi/(n+1)} + 1)\\ &= Ar_2^ke^{i\ell k\pi/(n+1)}\left(e^{i\ell k\pi/(n+1)} - e^{-i\ell k\pi/(n+1)}\right) = 2iAr_2^ke^{i\ell k\pi/(n+1)}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)\\ &= 2iA\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right) \text{ car } r_2e^{i\ell\pi/(n+1)} = \frac{\rho}{b}.\end{aligned}$$

Ainsi (en renommant la constante A en α), on a montré que :

$$\boxed{\text{il existe } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que pour tout } k \in [\![0, n+1]\!],\ x_k = 2i\alpha\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right).}$$

Q13. Il s'agit de faire la synthèse. Soit ρ une racine complexe de bc.
Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$. On pose $\lambda_\ell = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$.
On veut montrer que λ_ℓ est une valeur propre de $A_n(a, b, c)$.
Pour cela, on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 2i\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.
On a $X \neq 0_{n,1}$ car $x_1 = 2i\frac{\rho}{b}\sin\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \neq 0$ ($\rho \neq 0$ puisque $bc \neq 0$ et $\sin\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \neq 0$ car $\frac{\ell\pi}{n+1} \in]0, \pi[$).
Montrons qu'on a $A_n(a, b, c)X = \lambda_\ell X$.
Avec $x_0 = x_{n+1} = 0$, cela est équivalent à prouver que :

$$\text{pour tout } k \in [\![0, n-1]\!],\ bx_{k+2} + (a - \lambda_\ell)x_{k+1} + cx_k = 0.$$

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}bx_{k+2} + (a - \lambda_\ell)x_{k+1} + cx_k &= b2i\frac{\rho^{k+2}}{b^{k+2}}\sin\left(\frac{\ell(k+2)\pi}{n+1}\right) - 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)2i\frac{\rho^{k+1}}{b^{k+1}}\sin\left(\frac{\ell(k+1)\pi}{n+1}\right) + c2i\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)\\ &= 2i\frac{\rho^k}{b^k}\left(\frac{\rho^2}{b}\sin\left(\frac{\ell(k+2)\pi}{n+1}\right) - 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)\frac{\rho}{b}\sin\left(\frac{\ell(k+1)\pi}{n+1}\right) + c\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)\right)\\ &= 2ic\frac{\rho^k}{b^k}\left(\sin\left(\frac{\ell(k+2)\pi}{n+1}\right) - 2\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)\sin\left(\frac{\ell(k+1)\pi}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)\right)\end{aligned}$$

car $\rho^2 = bc$.
Par la formule de trigonométrie $\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, l'expression entre parenthèses est nulle. D'où le résultat.

Ainsi, pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_\ell = a + 2\rho\cos\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right)$ est une valeur propre de $A_n(a,b,c)$.

On a ainsi déterminé n valeurs propres distinctes (car $\rho \neq 0$ et pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{\ell\pi}{n+1} \in]0,\pi[$, la fonction cosinus est injective sur $]0,\pi[$) et $A_n(a,b,c)$ est une matrice de taille $n \times n$.
On en déduit que :

$$\boxed{A_n(a,b,c) \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les complexes } a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right) \text{ pour } \ell \in [\![1,n]\!].}$$

II. Matrices circulantes

Q14. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M_n.
Si on note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on a donc :

$$f(e_1) = e_n \text{ et pour tout } k \in [\![2,n]\!],\ f(e_k) = e_{k-1}.$$

En appliquant f, on a donc :

$$f^2(e_1) = f(e_n) = e_{n-1},\ f^2(e_2) = f(e_1) = e_n \text{ et pour tout } k \in [\![3,n]\!],\ f^2(e_k) = f(e_{k-1}) = e_{k-2}.$$

Comme la matrice M_n^2 est la matrice de f^2 dans la base canonique, on en déduit que :

$$M_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

En réitérant le processus, on se rend compte que « les diagonales remontent » jusqu'à obtenir l'identité.

$$\boxed{M_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \dots,\ M_n^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_n^n = \mathrm{I}_n.}$$

On a donc $M_n \times M_n^{n-1} = I_n$ donc $\boxed{M_n \text{ est inversible}}$ et $M_n^{-1} = M_n^{n-1}$.
En posant $P = X^n - 1$, on a $P(M_n) = M_n^n - I_n = 0_n$ donc :

$$\boxed{P = X^n - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } M_n.}$$

Q15. Les racines complexes de P sont les racines n-èmes de l'unité c'est-à-dire les complexes ω_n^k pour $k \in [\![0,n-1]\!]$.
On en déduit que le polynôme P est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples donc la matrice $\boxed{M_n \text{ est diagonalisable.}}$
On sait de plus que $\mathrm{Sp}(M_n) \subset \mathbb{U}_n = \{\omega_n^k,\ k \in [\![0,n-1]\!]\}$.
On peut facilement calculer le polynôme caractéristique de la matrice M_n. En effet, en développant le déterminant de la matrice $XI_n - M_n$ par rapport à la première colonne, on obtient des déterminants de matrices triangulaires qui valent donc le produit de leurs $n-1$ cœfficients diagonaux, ce qui donne l'égalité suivante :

$$\chi_M = X \times X^{n-1} + (-1)^{n+1} \times 1 \times (-1)^{n-1} = X^n - 1.$$

On en déduit que $\boxed{\mathrm{Sp}(M_n) = \mathbb{U}_n = \{\omega_n^k,\ k \in [\![0,n-1]\!]\}}$ et tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.
Il suffit donc de trouver un vecteur non nul de chaque sous-espace propre pour en obtenir une base.

Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Posons $\boxed{X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ \omega_n^{2k} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)k} \end{pmatrix}}$.

On a $X \neq 0_{n,1}$ et on constate que $(M_n - \omega_n^k I_n)X_k = 0_{n,1}$ car $\omega_n^n = 1$.
Ainsi, (X_k) est une base du sous-espace propre associé à la valeur propre ω_n^k.
Comme M_n est diagonalisable, ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En concaténant les bases des sous-espaces propres obtenues, on en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{B} = (X_0, \dots, X_{n-1}) \text{ est une base de vecteurs propres de } M_n.}$$

Q16. Par définition, les colonnes de Φ_n sont $X_0, \dots, X_n$.
Ainsi, Φ_n est la matrice de passage de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ à la base $\mathscr{B}$ donc $\boxed{\Phi_n \text{ est inversible.}}$
De plus, par les formules de changement de base, $\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n$ est la matrice de l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à la matrice M_n, dans la base $\mathscr{B}$.
Comme $\mathscr{B}$ est une base de vecteurs propres de M_n, cette matrice est diagonale et on a plus précisément :

$$\boxed{\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_n & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \omega_n^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix}}.$$

Q17. Comme A est une matrice circulante, il existe $(t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que :

$$A = T(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1}) = t_0 I_n + t_1 M_n + t_2 M_n^2 + \dots + t_{n-1} M_n^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} t_k M_n^k$$

d'après les calculs des puissances de M_n effectués à la question 14. Ainsi :

$$\boxed{\text{en posant } P = \sum_{k=0}^{n-1} t_k X^k, \text{ on a } P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } A = P(M).}$$

Q18. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
Effectuons la division euclidienne de P par $X^n - 1$. Il existe deux polynômes Q et R de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P = (X^n - 1)Q + R$ et $\deg(R) < n$.
On a donc $P(M_n) = (M_n^n - I_n)Q(M_n) + R(M_n) = R(M_n)$ car $M_n^n - I_n = 0_n$.
Or, il existe $(t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tel que $R = \sum_{k=0}^{n-1} t_k X^k$ et on a donc comme constaté précédemment :

$$R(M_n) = \sum_{k=0}^{n-1} t_k M_n^k = T(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$$

donc $R(M_n)$ est une matrice circulante.
Ainsi :

$$\boxed{\text{si } P \in \mathbb{C}[X] \text{ alors } P(M_n) \text{ est une matrice circulante.}}$$

Q19. Notons $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des matrices circulantes.
C'est par définition un sous-ensemble de $\text{Tœp}_n(\mathbb{C})$.
Par ce qui précède, on a également :

$$\mathscr{C}_n = \{P(M_n),\ P \in \mathbb{C}[X]\}.$$

En prenant pour P le polynôme nul, on montre que $0_n \in \mathscr{C}_n$.
Si A et B sont deux éléments de $\mathscr{C}_n$ alors il existe $(P,Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$ tel que $A = P(M_n)$ et $B = Q(M_n)$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a alors $\lambda A + B = (\lambda P + Q)(M_n)$ avec $\lambda P + Q \in \mathbb{C}[X]$ donc $\lambda A + B \in \mathscr{C}_n$.
On a ainsi prouvé que :

$$\boxed{\mathscr{C}_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathrm{T}\oe\mathrm{p}_n(\mathbb{C}).}$$

De plus, $AB = P(M_n)Q(M_n) = (PQ)(M_n)$ avec $PQ \in \mathbb{C}[X]$ donc $AB \in \mathscr{C}_n$.
On en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{C}_n \text{ est stable par produit.}}$$

On a enfin :

$$A^\top = (P(M_n))^\top = P(M_n^\top)$$

par linéarité de la transposition et parce que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(M_n^k)^\top = (M_n^\top)^k$.
Or, $M_n^\top = M_n^{n-1}$ donc $A^\top = P(M_n^{n-1})$.
En posant $R = P(X^{n-1})$, on a donc $R \in \mathbb{C}[X]$ et $A^\top = R(M_n)$ donc par la question 18, $A^\top \in \mathscr{C}_n$.
Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{C}_n \text{ est stable par transposition.}}$$

Q20. Soit A une matrice circulante. Par la question 17, il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$.
En reprenant les notations précédentes, on a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $M_n X_k = \omega_n^k X_k$ donc (par le cours) $P(M_n)X_k = P(\omega_n^k)X_k$ et $X_k \neq 0_{n,1}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\text{la famille } (X_0, \dots, X_{n-1}) \text{ est aussi une base de vecteurs propres de } A.}$$

Ainsi :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont les } P(\omega_n^k) \text{ pour } k \in [\![0, n-1]\!].}$$

Problème 2 - Modèle SIR pour la propagation d'épidémie et séries de Dirichlet (extrait Mines PSI 2025)

Partie I. Linéarisation de (E)

Q1. ▸ $u' + u + 1 = \frac{1}{2}(1+u)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}_+$ donc $\boxed{\text{le problème de Cauchy } (C_\ell) \text{ admet une unique solution}}$.

▸ $u' + u + 1 = \frac{1}{2}(1+u)$ est équivalent à $u' + \frac{1}{2}u = -\frac{1}{2}$ dont une solution particulière est la fonction constante égale à -1 et les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{-\frac{1}{2}x}$ où λ décrit $\mathbb{R}$ puisque $x \mapsto \frac{1}{2}x$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2}$.
On en déduit, en notant u l'unique solution du problème de Cauchy, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $u(x) = \lambda e^{-\frac{1}{2}x} - 1$. Mais $u(0) = 0$ donc $\lambda - 1 = 0$ donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ u(x) = e^{-\frac{1}{2}x} - 1}.$$

▸ La décroissance de u sur $\mathbb{R}_+$ est évidente, $u(0) = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} u = -1$ donc on a le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	
$u(x)$	0	$\searrow$	-1

Q2. ▸ Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. La fonction constante égale à γ est solution de (E_ℓ) ssi $0 + \gamma + 1 = \frac{1}{2}(1+\gamma)$ ssi $\gamma = -1$:

$$\boxed{\text{l'unique solution constante de } (E_\ell) \text{ est } -1.}$$

▸ La question précédente montre que l'on a bien

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} u(x) = \gamma.}$$

Partie II. Séries de Dirichlet

Q3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait par hypothèse que $a_n = O\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$ et $\lambda_n = O(n)$ donc $\lambda_n^k a_n = O\left(\dfrac{n^k}{2^n}\right)$.

De plus, $\dfrac{n^k}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ puisque $\dfrac{n^k/2^n}{1/n^2} = \dfrac{n^{k+2}}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Comme $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{n^k}{2^n} \geqslant 0$, on en déduit par comparaisons, que la série $\sum \lambda_n^k a_n$ converge (même absolument).

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ b_k \text{ est bien défini.}}$$

Q4. ▸ Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors $|f_n(x)| = |a_n| e^{-\lambda_n x}$.

Comme $\lambda_n \geqslant 0$, la fonction $|f_n|$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle admet un maximum atteint en 0 d'où :

$$\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = |f_n(0)| = |a_n|.$$

On sait que $\sum a_n$ converge absolument (question précédente avec $k = 0$) donc $\sum \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+}$ converge i.e. $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ donc a fortiori,

$$\boxed{\textstyle\sum f_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R}_+.}$$

▸ Toutes les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont clairement continues sur $\mathbb{R}_+$ et la convergence de la série de fonctions est uniforme sur $\mathbb{R}_+$ donc par le théorème de continuité des sommes de séries de fonctions, on en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

Q5. ▸ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = a_n$ donc $f(0) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ donc $\boxed{f(0) = a_0 + b_0.}$

▸ Si $n \geqslant 1$ alors $\lambda_n > \lambda_0 = 0$ puisque (λ_n) est strictement croissante, donc $f_n(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

Pour $n = 0$, $\lambda_0 = 0$ donc $f_0 : x \mapsto a_0$ donc $f_0(x) \to a_0$ lorsque $x \to +\infty$.

Enfin, puisque $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ (et $+\infty$ est une borne de $\mathbb{R}_+$), le théorème de la double limite donne $f(x) \to a_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0$ lorsque $x \to +\infty$ i.e.

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a_0.}$$

Q6. Appliquons le théorème de classe $\mathcal{C}^k$ des sommes de séries de fonctions.

▸ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}_+$ et on a pour tout $j \in [\![1,k]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n^{(j)}(x) = (-1)^j \lambda_n^j f_n(x)$.

▸ La série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément et donc simplement sur $\mathbb{R}_+$.

▸ Soit $j \in [\![1,k]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $|f_n^{(j)}(x)| = \lambda_n^j |f_n(x)|$ avec $\lambda_n^j \geqslant 0$ d'où $\|f_n^{(j)}\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \lambda_n^k \|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \lambda_n^j |a_n|$. Par la question Q3, on en déduit que la série $\sum f_n^{(j)}$ est normalement convergente.
En particulier, pour tout $j \in [\![1,k-1]\!]$, $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
On en déduit que :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+, f^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda_n^k e^{-\lambda_n x}.}$$

En particulier, $\boxed{f^{(k)}(0) = (-1)^k b_k.}$

Q7. Supposons f nulle. Il a été vu que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a_0$ donc $a_0 = 0$.

Il reste donc pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x} = 0$. En multipliant par $e^{\lambda_1 x}$ il vient

$$\forall x \geqslant 0, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{(\lambda_1-\lambda_n)x} = a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n e^{(\lambda_1-\lambda_n)x} = 0.$$

La suite $(\lambda_n - \lambda_1)_{n\geqslant 1}$ vérifie les mêmes hypothèses que la suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ (nulle en $n=1$, strictement croissante, tend vers $+\infty$, dominée par n) donc $a_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n e^{(\lambda_1-\lambda_n)x} \to a_1$ lorsque $x \to +\infty$ donc $a_1 = 0$. On démontre ainsi par récurrence forte que tous les a_n sont nuls.

$$\boxed{\text{Si } f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+ \text{ alors } a_n = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

Partie III. Relations sur les coefficients de la série de Dirichlet

Q8. Nous avons vu que $y(0) = a_0 + b_0$. Or $y(0) = 0$ donc $b_0 = -a_0$.
Par ailleurs, on sait que $y(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} a_0$ mais par hypothèse, $y(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} c$. Ainsi :

$$\boxed{a_0 = c \text{ et } b_0 = -c.}$$

Q9. D'après (E), $y' = -y - 1 + \frac{1}{2}e^y$. Mais $y(0) = 0$ donc $y'(0) = -\frac{1}{2}$. De plus, on a vu que $y'(0) = -b_1$ donc :

$$\boxed{b_1 = \tfrac{1}{2}.}$$

Q10. La fonction $g = e^y$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ par composition de exp et y et $g' = y'g$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dérive $k-1$ fois cette relation en utilisant la formule de Leibniz, on obtient :

$$g^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} y^{(i+1)} g^{k-1-i}.$$

On évalue en 0, on utilise $y^{(i+1)}(0) = (-1)^{i+1} b_{i+1}$ et on note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = (-1)^n g^{(n)}(0)$:

$$(-1)^k d_k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{i+1} b_{i+1} (-1)^{k-1-i} d_{k-1-i}.$$

Les puissances de -1 se simplifient et en changeant d'indice, on obtient :

$$\boxed{d_0 = 1 \text{ et } \quad \forall k \geqslant, \ d_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} d_{k-i} b_i}$$

puisque $d_0 = g(0) = e^0 = 1$.

Q11. D'après (E), on a $y' + y + 1 = \frac{1}{2}e^y = \dfrac{1}{2}g$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dérive k fois cette relation et on évalue en 0 (attention, $1^{(k)} = 0$ car $k \geqslant 1$), on obtient :

$$y^{(k+1)}(0) + y^{(k)}(0) = \frac{1}{2}g^{(k)}(0) \text{ donc } (-1)^{k+1}b_{k+1} + (-1)^k b_k = \frac{1}{2}(-1)^k d_k$$

donc

$$\boxed{b_{k+1} - b_k = -\frac{1}{2}d_k.}$$

Partie IV. Approximation de la solution y

Q12. On sait déjà que la suite (y_N) converge uniformément vers y sur $\mathbb{R}_+$ puisque l'on a montré que toute série de Dirichlet converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. On demande ici une estimation qualitative de cette convergence.

▸ Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$|y_N(x) - y(x)| = \left|\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-\lambda_n x} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x}\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x}\right| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| e^{-\lambda_n x} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|$$

où l'utilisation de l'inégalité triangulaire est légitime puisque la dernière série converge, comme on l'a déjà vu. Puis, on a :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M}{2^n} = M \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = M \frac{1}{2^{N+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{M}{2^N}$$

ce qui donne bien finalement

$$\boxed{\|y_N - y\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \leqslant \frac{M}{2^N}}.$$

Puisque $\dfrac{M}{2^N} \to 0$ quand $N \to +\infty$, $\|y_N - y\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \to 0$ donc on retrouve bien :

$$\boxed{\text{la convergence uniforme de } (y_N) \text{ vers } y \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

▸ On peut obtenir une meilleure estimation de la vitesse de convergence sur un intervalle gardant 0 à distance puisque 0 maximise $e^{-\lambda_n x}$. On prend donc $a > 0$ et $\boxed{J = [a, +\infty[}$. Alors, par les mêmes calculs,

$$\|y_N - y\|_{\infty, J} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| e^{-\lambda_n a} \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{M}{2^n} e^{-\lambda_{N+1} a}$$

en exploitant la croissance de (λ_n). Et comme précédemment,

$$\boxed{\|y_N - y\|_{\infty, J} \leqslant \frac{M}{2^N} e^{-\lambda_{N+1} a}}$$

ce qui est meilleur que $\frac{M}{2^N}$ puisque $\lambda_{N+1} > 0$ et $a > 0$.

Q13. Au vu de l'expression de A et B, on a $VA = B$ avec V une matrice de Vandermonde :

$$\boxed{V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & \lambda_2^{N-1} & \dots & \lambda_N^{N-1} \end{pmatrix}.}$$

Q14. La suite (λ_n) est strictement croissante donc ses valeurs sont deux à deux distinctes donc on sait que V est inversible. Ainsi :

$$\boxed{\text{le système } VA = B \text{ admet une unique solution.}}$$

Partie V. Modèle de propagation d'épidémie SIR

Q15. On a $S' = -IS$ donc par le théorème de résolution des équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1, pour tout $x \geqslant 0$, $S(x) = S_0 e^{-\int_0^x I(t)dt}$ avec $S_0 = 0$ donc S est la fonction nulle.
Il reste alors $I' = -I$ et $R' = I$.
$I' = -I$ et $I(0) = I_0$ donc pour tout $x \geqslant 0$, $I(x) = I_0 e^{-x}$.
Puis $R'(x) = I_0 e^{-x}$ donc il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant 0$, $R(x) = -I_0 e^{-x} + L$.
Comme de plus, $R(0) = R_0$, on obtient pour tout $x \geqslant 0$, $R(x) = R_0 + I_0(1 - e^{-x})$.
Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ S(x) = 0,\ I(x) = I_0 e^{-x},\ R(x) = R_0 + I_0(1 - e^{-x}).}$$

Q16. Comme vu précédemment, pour tout $x \geqslant 0$, $S(x) = S_0 e^{-\int_0^x I(t)dt}$.
Comme $S_0 > 0$,

$$\boxed{S \text{ est strictement positive sur } \mathbb{R}_+ \text{ (et a fortiori ne s'annule jamais).}}$$

La formulation de la question semble montrer que l'auteur du sujet avait en tête une autre preuve, plus compliquée, qui doit être celle-ci :
Raisonnons par l'absurde. Si la fonction S s'annule alors comme il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $S(x) = Ke^{-F(x)}$ en notant F une primitive de I sur $\mathbb{R}_+$, on a $K = 0$ et donc S est identiquement nulle. Par suite, les fonctions I et R sont les mêmes que dans la question précédente. Ainsi, le triplet (S, I, R) est le même qu'à la question précédente alors que les conditions initiales ne sont pas les mêmes (la valeur de S_0 est différente), ce qui contredit ce qui est dit dans le Théorème 1.
On en déduit que S ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ et comme S est continue sur $\mathbb{R}_+$, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle ne prend que des valeurs strictement positives puisque $S_0 > 0$.

Q17. De l'équation $S' = -IS$, on tire $I = -\dfrac{S'}{S}$ (S ne s'annule pas d'après la question précédente).
En réinjectant dans l'équation $I' = IS - I$, on obtient :

$$\left(-\frac{S'}{S}\right) = -\frac{S'}{S}S + \frac{S'}{S} = -S' + \frac{S'}{S}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\left(-\frac{S'}{S}\right)' = -S' + \frac{S'}{S}.}$$

Q18. On a $h(0) = 0$ et il reste à prouver que $h' + h + 1 = \frac{1}{2}e^h$ i.e. $\dfrac{S'}{S} + \ln(2S) + 1 = S$.

Mais d'après ce qui précède, $\left(-\dfrac{S'}{S}\right)' = -S' + \dfrac{S'}{S}$. Pour $x \geqslant 0$, on intègre ceci de 0 à x :

$$\int_0^x \left(-\frac{S'}{S}\right)'(t)dt = -\int_0^x S'(t)dt + \int_0^x \frac{S'(t)}{S(t)}dt \text{ donc } -\frac{S'(x)}{S(x)} + \frac{S'(0)}{S(0)} = -S(x) + S(0) + \ln\left(\frac{S(x)}{S(0)}\right).$$

Comme $S(0) = S_0 = \frac{1}{2}$ et $S'(0) = -I(0)S(0) = -\frac{1}{4}$ donc

$$-\frac{S'(x)}{S(x)} - \frac{1}{2} = -S(x) + \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{S(x)}{S(0)}\right)$$

ce qui donne bien $\dfrac{S'}{S} + \ln(2S) + 1 = S$.
Ainsi :

$$\boxed{h \text{ est solution du problème de Cauchy } (C).}$$

Q19. D'après ce qui précède, $h = y$ par unicité de la solution de (C) donc $S = \frac{1}{2}e^y$.
Ainsi, $|S_N - S| = |\frac{1}{2}e^{y_N} - \frac{1}{2}e^y| = \frac{1}{2}|e^{y_N} - e^y|$.

Pour estimer la différence de deux exponentielles, on utilise l'inégalité des accroissements finis (légitime car exp est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) : si $a < b$ alors

$$\forall x, y \in [a,b], \quad |e^x - e^y| \leqslant \sup_{t\in[a,b]} |\exp'(t)||x-y| \leqslant e^b|x-y|.$$

On doit donc maintenant localiser les fonctions y_N et y. Comme précédemment, si $x \geqslant 0$ alors

$$|y(x)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n x}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{2^n} = 2M \text{ et de même } |y_N(x)| \leqslant 2M.$$

On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[-2M, 2M]$ ce qui donne $|e^{y_N(x)} - e^{y(x)}| \leqslant e^{2M}|y_N(x) - y(x)|$.
Or, on a aussi établi que $\|y_N - y\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \frac{M}{2^N}$.
Ainsi :

$$\boxed{\|S_N - S\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leqslant \frac{Me^{2M}}{2^{N+1}}}.$$

Puisque le majorant tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, on a bien montré par encadrement que :

$$\boxed{\text{la suite } (S_N) \text{ converge uniformément vers } S \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$