Chapitre 9

Endomorphismes d'un espace euclidien

Dans ce chapitre E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

I Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 1.1 (Représentation des formes linéaires)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ une forme linéaire sur E, alors il existe un unique vecteur $y \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, f(x) = \langle x, y \rangle .$$

Remarque 1.2 : Pour tout $y \in E$, l'application $f_y : x \mapsto \langle x, y \rangle$ est une forme linéaire sur E.

Définition/Théorème 1.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Il existe un unique endomorphisme u^*, appelé **adjoint de u** tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle .$$

Lemme 1.4

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$,

$$u = v \Leftrightarrow \forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle v(x), y \rangle .$$

Proposition 1.5

- $\forall u \in \mathcal{L}(E), (u^*)^* = u$;
- $u \mapsto u^*$ est linéaire ;
- $\forall u, v \in \mathcal{L}(E), (u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.

Théorème 1.6

Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Proposition 1.7 (matrice de l'adjoint)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
Alors la matrice de u^* dans la base $\mathcal{B}$ est : $A^\top$.

Remarque 1.8 : On peut retrouver les résultats de la proposition 1.5 à l'aide de ce résultat, de plus :

$$\operatorname{rg}(u^*) = \operatorname{rg}(u), \quad \operatorname{tr}(u^*) = \operatorname{tr}(u), \quad \det(u^*) = \det(u),$$

$$\chi_{u^*} = \chi_u \quad \text{et} \quad \operatorname{Sp}(u^*) = \operatorname{Sp}(u).$$

II Matrices orthogonales

II. A Définition et caractérisations

Définition 2.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est une **matrice orthogonale** lorsque $A^\top A = I_n$.

Remarque 2.2 : Une matrice orthogonale A est inversible et : $A^{-1} = A^\top$.

Théorème 2.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les lignes et colonnes de A sont vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.
Sont équivalents :

- A est orthogonale ;
- la famille des colonnes de A est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$;
- la famille des lignes de A est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Exemples 2.4 :

- I_n est une matrice orthogonale.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale.

Proposition 2.5

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs de E.
Alors $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E si et seulement si $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est une matrice orthogonale.

Définition 2.6

Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites **orthogonalement semblables** lorsqu'il existe une matrice de passage orthogonale P telle que : $B = P^{-1}AP = P^\top AP$.

II. B Groupe orthogonal

Définition/Proposition 2.7

L'ensemble des matrices orthogonales de taille n est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$, appelé **groupe orthogonal d'ordre n** et noté $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$.

Définition/Proposition 2.8

Soit A une matrice orthogonale, alors $\det A \in \{-1, 1\}$,

- on dit que A est une matrice orthogonale **positive** ou **directe** lorsque $\det A = 1$;
- on dit que A est une matrice orthogonale **négative** ou **indirecte** lorsque $\det A = -1$.

Définition/Proposition 2.9

L'ensemble des matrices orthogonales positives est un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal d'ordre n** et noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$.

II. C Espaces euclidiens orientés

1) Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Dans cette sous-section, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 1$. Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$. On définit sur l'ensemble des bases de E la relation suivante :

$$\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}' \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0.$$

Proposition 2.10

La relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E. Elle a deux classes d'équivalence.

Définition 2.11

Une orientation de E est un choix de l'une des deux classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$. Une base est dite **directe** lorsqu'elle est dans la classe d'équivalence choisie, **indirecte** sinon.

Remarque 2.12 : Pour un choix d'orientation et une base $\mathcal{B}_0$ dans cette classe d'équivalence, une base $\mathcal{B}$ de E est :

- directe si et seulement si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$.
- indirecte si et seulement si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$.

Définition 2.13 (Orientation de $\mathbb{R}^n$)

Dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique est directe.

2) Bases orthonormées directes

À nouveau E désigne un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$.

Proposition 2.14

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $\mathcal{B}'$ une famille de n vecteurs de E.
Alors $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E de même orientation que $\mathcal{B}$ si et seulement si : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in SO_n(\mathbb{R})$.

Proposition 2.15

On suppose que E est un espace euclidien orienté, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'} .$$

III Endomorphismes autoadjoints

III. A Définition et caractérisation matricielle

Définition 3.1

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **autoadjoint** lorsque $u = u^*$.

Notation : L'ensemble des endomorphisme autoadjoints de E est noté $\mathcal{S}(E)$.

Remarque 3.2 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \langle x, u(y) \rangle = \langle u(x), y \rangle .$$

Proposition 3.3

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

Remarque 3.4 : Les endomorphismes autoadjoints sont parfois appelés endomorphismes symétriques, d'où la notation $\mathcal{S}(E)$.

Proposition 3.5

Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints.

III. B Réduction des endomorphismes autoadjoints

Proposition 3.6

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u.

Proposition 3.7

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

Théorème 3.8 (spectral)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Sont équivalents :

- u est autoadjoint ;
- E est la somme orthogonale des sous-espaces propres de u : $E = \overset{\perp}{\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}} E_\lambda(u)$;
- il existe une base orthonormée diagonalisant u.

Corollaire 3.9

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est symétrique si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable (i.e. orthogonalement semblable à une matrice diagonale).

Attention : Faux pour les matrices complexes !

Contre exemple 3.10 : $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ est symétrique complexe et nilpotente non nulle donc non diagonalisable.

III. C Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Définition 3.11

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- On dit que u est autoadjoint **positif** lorsque :
$$u \in \mathcal{S}(E) \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle \geqslant 0.$$
- On dit que u est autoadjoint **défini positif** lorsque :
$$u \in \mathcal{S}(E) \quad \text{et} \quad \forall x \in E \setminus \{0\}, \langle x, u(x) \rangle > 0.$$

Notation : L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs est noté $\mathcal{S}^+(E)$, l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs est noté $\mathcal{S}^{++}(E)$.

Proposition 3.12

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors :
$$u \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow u \in \mathcal{S}(E) \text{ et } \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+,$$
et
$$u \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow u \in \mathcal{S}(E) \text{ et } \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

Définition 3.13

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est **symétrique positive** lorsque :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle x, Ax \rangle \geqslant 0$$
- On dit que A est **symétrique définie positive** lorsque :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}, \langle x, Ax \rangle > 0$$

Notation : On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives et définie positives de taille n.

Proposition 3.14

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+,$$
et
$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

IV Isométries vectorielles

IV. A Définition et caractérisations

Définition 4.1

On appelle **isométrie vectorielle** ou simplement **isométrie** un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve la norme :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

Exemple 4.2 : Une symétrie orthogonale est une isométrie. En particulier, une réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan) est une isométrie.

Théorème 4.3

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Sont équivalents :

- u est une isométrie ;
- u conserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$;
- l'image de $\mathcal{B}$ par u est une base orthonormée de E ;
- u est un isomorphisme et $u^* = u^{-1}$.

Proposition 4.4

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.

Remarque 4.5 : Les isométries sont des automorphisme, parfois appelées automorphismes orthogonaux.

IV. B Groupe orthogonal

Définition/Proposition 4.6

L'ensemble des isométries de E est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$, appelé **groupe orthogonal de $\boldsymbol{E}$**, noté $O(E)$.

Proposition 4.7

Soit u une isométrie de E, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$.

Définition 4.8

Soit u une isométrie,

- on dit que u est une isométrie **directe** lorsque $\det u = 1$;
- on dit que u est une isométrie **indirecte** lorsque $\det u = -1$.

Définition/Proposition 4.9

L'ensemble des isométries directes est un sous-groupe de $O(E)$ appelé **groupe spécial orthogonal de $\boldsymbol{E}$** et noté $SO(E)$.

IV. C Matrices orthogonales de taille 2

Proposition 4.10

Le groupe $SO_2(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales directes de taille 2 est l'ensemble des matrices de la forme :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales indirectes de taille 2 est l'ensemble des matrices de la forme :

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4.11

L'application :

$$\begin{array}{rccc} R & : & (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (SO_2(\mathbb{R}), \times) \\ & & \theta & \longmapsto & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

est un morphisme de groupes surjectif de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Proposition 4.12

Le groupe $(SO_2(\mathbb{R}), \times)$ est commutatif et isomorphe à $(\mathbb{U}, \times)$.

IV. D Isométries d'un plan euclidien orienté

Proposition 4.13

Soit E un plan euclidien orienté et $u \in SO(E)$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

On dit alors que u est la **rotation d'angle $\boldsymbol{\theta}$**.

Proposition 4.14

Soit E un plan euclidien orienté. Le groupe $(SO(E), \circ)$ est isomorphe à $(\mathbb{U}, \times)$.

Proposition 4.15

Soit E un plan euclidien orienté et $u \in O(E) \setminus SO(E)$, alors u est une réflexion de E.

Remarque 4.16 : Pour E un plan euclidien orienté,

- si $u \in SO(E)$ avec $u \neq \mathrm{id}_E$ et $u \neq -\mathrm{id}_E$, alors u est ni diagonalisable ni trigonalisable ;
- si $u \in O(E) \setminus SO(E)$, alors u est une réflexion diagonalisable en base orthonormée sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 4.17

Soit E un plan euclidien orienté, x et y des vecteurs unitaires de E. Il existe une unique rotation $u \in SO(E)$ telle que $u(x) = y$.

Définition 4.18

Soit x et y deux vecteurs non nuls d'un plan euclidien orienté E. Alors il existe une unique rotation u telle que $u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{y}{\|y\|}$, l'angle de cette rotation est appelé **angle orienté des vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$**, il est noté (x, y).

IV. E Réduction des isométries

Proposition 4.19

Soit u une isométrie vectorielle de E et F un sous-espace vectoriel de E.
Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Proposition 4.20

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, les valeurs propres complexes de A sont de module 1.

Lemme 4.21

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, alors il existe une droite ou un plan stable par u.

Théorème 4.22

Soit u une isométrie vectorielle. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux :

- de taille 1 de la forme (1) ou (-1) ;
- de taille 2 de la forme :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

Corollaire 4.23

Toute matrice orthogonale est orthogonalement semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & (0) & \\ & & R(\theta_1) & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & R(\theta_r) \end{pmatrix}, \quad \text{avec } (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}.$$

Proposition 4.24

Soit $u \in SO(E)$ avec E un espace euclidien de dimension 3, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \theta \in \mathbb{R}.$$

Remarques 4.25 :

- Un élément de $SO(\mathbb{R}^3)$ est donc une rotation autour d'un axe : il existe une droite D et un plan P orthogonal à D tels que $u_{|D} = \mathrm{id}_D$ et $u_{|P}$ est une rotation.
- Si $u \in O(\mathbb{R}^3) \setminus SO(\mathbb{R}^3)$, alors $-u \in SO(\mathbb{R}^3)$ et il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R(\theta + \pi) \end{pmatrix}.$$