Exercices

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de E muni de ce produit scalaire.

Exercice 2. Inégalité de Bessel
Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.
Montrer que le projecteur f est orthogonal si et seulement si : $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 3. On munit $E = \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par : $\forall f, g \in E$,

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

1. (a) Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui tend vers $f : x \mapsto 1$ dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$.
   (b) En déduire que F est dense dans E.
2. Déterminer $F^\perp$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 4. Décomposition d'Iwasawa
Montrer que pour toute matrice inversible $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice orthogonale $O \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire T telles que : $A = O \times T$.
Indication : penser à l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que :

$$\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp.$$

En déduire :

$$\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u^*)^\perp, \quad \operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u^*)^\perp \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp.$$

Exercice 6. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^* = -f$.
Montrer que $\mathrm{id}_E + f$ est bijectif.

Exercice 7. Soit E un espace euclidien, $a, b \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $f : x \mapsto \langle x, a\rangle\, b - \langle x, b\rangle\, a$.
Déterminer l'adjoint de f.

Exercice 8. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = 0$.
Montrer que $\operatorname{Ker}(f + f^*) = \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(f^*)$.

Exercice 9. Soit u un endomorphisme autoadjoint, montrer que :

$$E = \operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u.$$

Exercice 10. Soit E une espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $f^* \circ f \in \mathcal{S}^+(E)$.

Exercice 11.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, montrer que $A = 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente telle que $A^\top A = AA^\top$. Montrer que $A = 0$.

Exercice 12.

1. Montrer qu'une symétrie est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.
2. Montrer qu'une symétrie est autoadjointe si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

Exercice 13. Soit E un espace euclidien et $f \in O(E)$.
Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^2 = \mathrm{id}_E$.

Exercice 14.

1. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \det(e^M) = e^{\operatorname{tr} M}$. Indication : trigonalisation.
2. Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique, montrer que : $e^A \in \mathcal{S}O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'espace euclidien $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que $f : A \mapsto AB$ soit une isométrie de E.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ pour que $g : A \mapsto B^{-1}AB$ soit une isométrie de E.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in SO_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^\top \times \begin{pmatrix} I_p & & & (0) \\ & R(\theta_1) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & R(\theta_r) \end{pmatrix} \times P, \quad \text{avec } (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \mathbb{R}.$$

En déduire que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Exercices CCINP

Exercice 17 (CCINP 39). On note l^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

   On pose alors $(x|y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

   (b) Démontrer que l^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

   Dans la suite de l'exercice, on admet que $(\,|\,)$ est un produit scalaire dans l^2.
   On suppose que l^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $||\;||$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $x = (x_n) \in l^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Démontrer que φ est une application linéaire et continue de l^2 dans $\mathbb{R}$.
3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.
   Déterminer $F^\perp$ (au sens de $(\,|\,)$).
   Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 18 (CCINP 63).
Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(\,|\,)$.
On pose $\forall x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.
Pour tout endomorphisme u de E, on note u^* l'adjoint de u.

1. Un endomorphisme u de E vérifiant $\forall x \in E$, $(u(x)|x) = 0$ est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
   Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
   i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
   ii. $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
   iii. $\forall x \in E$, $||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

Exercice 19 (CCINP 66).

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.
   Prouver que $A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \mathrm{sp}(A) \subset [0, +\infty[$.
2. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $A^2 \in S_n^+(\mathbb{R})$.
3. Prouver que $\forall\, A \in S_n(\mathbb{R})$, $\forall\, B \in S_n^+(\mathbb{R})$, $AB = BA \Longrightarrow A^2 B \in S_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
   Prouver qu'il existe $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

Exercice 20 (CCINP 80). Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 21 (CCINP 81). On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice 22 (CCINP 92).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A\,, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E.
   Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
   On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.