

# Espaces préhilbertiens

## I Produit scalaire

### I. A Définition et exemples canoniques

#### Définition 1.1

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $\varphi$  est un **produit scalaire** sur  $E$  lorsque  $\varphi$  est

**une forme bilinéaire** :

- i)  $\forall x \in E, y \mapsto \varphi(x, y)$  est linéaire ;
- ii)  $\forall y \in E, x \mapsto \varphi(x, y)$  est linéaire.

**symétrique** :  $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$  ;

**définie positive** :

- i)  $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$  ;
- ii)  $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$ .

**Notation** : Si  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$  et  $x, y \in E$ , le réel  $\varphi(x, y)$  est appelé produit scalaire de  $x$  et  $y$  et il est noté  $(x|y)$  ou  $\langle x, y \rangle$ .

#### Définition 1.2

On appelle **espace préhilbertien réel** un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Un espace préhilbertien réel de dimension finie est appelé un **espace euclidien**.

### Exemples 1.3 :

- $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est un muni de son produit scalaire canonique défini par :  $\forall X = (x_1, \dots, x_n), Y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x_i y_i = X^\top \times Y.$$

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  est un muni de son produit scalaire canonique défini par :  $\forall M, N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ,

$$\langle M, N \rangle = \text{tr}(M^\top \times N)$$

- $\mathcal{C}^0([a; b])$  est un muni de son produit scalaire canonique défini par :  $\forall f, g \in \mathcal{C}^0([a; b])$ ,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

### I. B Norme associée à un produit scalaire

Jusqu'à la fin du chapitre,  $E$  désigne un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire est noté  $\langle , \rangle$ .

#### Définition 1.4

On appelle **norme associée au produit scalaire**  $\langle , \rangle$  l'application :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{aligned}$$

#### Méthode 1.5 (Formules de polarisation)

On peut exprimer le produit scalaire en fonction de la norme associée en développant  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$  ou  $\|x - y\|^2$ .

#### Théorème 1.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit  $x, y \in E$ , on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|.$$

De plus,  $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \times \|y\|$  si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

**Exemples 1.7 :**

- Soit  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  des réels, alors

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right|$$

- Soit  $f$  et  $g$  des fonctions continues sur un intervalle  $[a; b]$ , alors

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right|$$

#### Théorème 1.8

La norme associée au produit scalaire  $\langle , \rangle$  sur  $E$  est une norme.

**Remarque 1.9 : Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire**

$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid x = \lambda y$  ou  $y = \lambda x$ , c'est à dire si et seulement si  $x$  et  $y$  sont positivement liés.

## II Orthogonalité

### II. A Vecteurs orthogonaux

#### Définition 2.1

Deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont dit **orthogonaux** et on note  $x \perp y$ , lorsque  $\langle x, y \rangle = 0$ .

**Exemples 2.2 :** • Dans  $C^0([0; 2\pi])$  muni de son produit scalaire canonique, les fonctions sinus et cosinus sont orthogonales.

- Déterminer les vecteurs orthogonaux au vecteur  $(1, 0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique.

**Remarques 2.3 :** • si  $x \perp y$ , alors  $y \perp x$  ;

- si  $x \perp x$ , alors \_\_\_\_\_ ;

### II. B Orthogonal d'une partie

#### Définition 2.4

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ , on appelle **orthogonal de  $A$**  l'ensemble :

$$A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A, x \perp y\}.$$

#### Proposition 2.5

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

- $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  ;
- $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$ .

#### Méthode 2.6

Pour déterminer l'orthogonal d'une partie  $A$  de  $E$  (en particulier d'un sous-espace vectoriel), il suffit de déterminer l'orthogonal d'une famille génératrice (souvent une base) de  $\text{Vect}(A)$ .

**Exemple 2.7 :** Dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , déterminer  $\text{Vect}((1, 0, 1))^\perp$ .

**Remarque 2.8 :** Pour tout  $a \in E \setminus \{0_E\}$ , on note  $\varphi_a : x \mapsto \langle x, a \rangle$  forme linéaire sur  $E$ , continue d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc :  $\text{Ker } \varphi_a$  est un fermé. Donc pour toute partie non vide  $A$  de  $E$ ,  $A^\perp$  est un fermé de  $E$  comme intersection de fermés.

### II. C Familles orthogonales, orthonormées

#### Définition 2.9

Soit  $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs,

- On dit que  $\mathcal{F}$  est une **famille orthogonale** lorsque ses vecteurs sont deux à deux orthogonaux :  $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j$ .
- On dit que  $\mathcal{F}$  est une **famille orthonormée** lorsqu'elle est orthogonale et que tous ses vecteurs sont normés.

#### Théorème 2.10 (Pythagore)

Deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  sont orthogonaux si et seulement si :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

#### Corollaire 2.11

Si  $(x_1, \dots, x_n)$  est une famille orthogonale de vecteurs de  $E$ , alors :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

#### Proposition 2.12

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de  $E$  est libre.  
En particulier toute famille orthonormée est libre.

### II. D Bases orthonormées

#### Définition 2.13

Soit  $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$  une famille de vecteurs.

On dit que  $\mathcal{F}$  est une **base orthonormée** de  $E$  lorsque c'est une base de  $E$  et une famille orthonormée.

#### Théorème 2.14

Tout espace euclidien a des bases orthonormées.

#### Théorème 2.15 (base orthonormée incomplète)

Soit  $E$  un espace euclidien et  $\mathcal{L}$  une famille orthonormée de  $E$ , alors  $\mathcal{L}$  peut être complétée en une base orthonormée de  $E$ .

### Proposition 2.16

On suppose que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$  et  $x \in E$ . Alors les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont données par

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i = \langle x, e_i \rangle.$$

### Proposition 2.17 (Produit scalaire dans une base orthonormée)

On suppose que  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$  et  $x, y \in E$ . Si les coordonnées de  $x$  et  $y$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont respectivement  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$ , alors

$$\langle x, y \rangle = \quad \text{et } \|x\| = \quad$$

**Remarque 2.18 :** Si  $E$  est un espace euclidien de dimension  $n$ ,  $x, y \in E$  et  $X, Y$  sont les matrices de  $x, y$  respectivement dans une base orthonormée, alors le produit scalaire de  $x$  et  $y$  est égal au produit scalaire de  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  muni du produit scalaire :

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = {}^t X \times Y = \sum_{k=1}^n x_i y_i.$$

## III Projection orthogonale

### III. A Supplémentaire orthogonal

#### Définition/Théorème 3.1

Si  $V$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ , alors  $V$  et  $V^\perp$  sont supplémentaires. Le sous-espace vectoriel  $V^\perp$  est appelé **le supplémentaire orthogonal** de  $V$ .

**Remarque 3.2 :** L'espace préhilbertien réel  $E$  n'est pas nécessairement de dimension finie.

Mais le résultat est faux sans l'hypothèse :  $V$  de dimension finie !

#### Proposition 3.3

Si  $E$  est un espace euclidien (de dimension finie) et  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors :

- $\dim(V^\perp) = \quad$  ;
- $(V^\perp)^\perp = \quad$  .

#### Méthode 3.4

Dans  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire canonique, pour déterminer l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel  $V$  défini par un système linéaire homogène, on peut interpréter chaque équation comme un produit scalaire nul et ainsi avoir  $V$  comme l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel. On conclut par la proposition ci-dessus.

**Exemple 3.5 :** Déterminer l'orthogonal de

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + z + t = x + y + 2z - t = 0\}.$$

### III. B Projection orthogonale

#### Définition 3.6

Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ .

On appelle **projection orthogonale** sur  $V$  la projection  $P_V$  sur  $V$  parallèlement à son supplémentaire orthogonal  $V^\perp$ .

#### Proposition 3.7

Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel  $V$  de  $E$ , le projeté orthogonal sur  $V$  d'un vecteur  $x \in E$  est :

$$P_V(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, e_i \rangle e_i.$$

**Proposition 3.8**

Si  $V$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  engendré par une famille  $(y_1, \dots, y_p)$  et  $x \in E$ , alors pour  $y \in E$  on a

$$\begin{aligned} y = P_V(x) &\Leftrightarrow [y \in V \text{ et } x - y \in V^\perp] \\ &\Leftrightarrow [y \in V \text{ et } \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \langle (x - y), y_i \rangle = 0]. \end{aligned}$$

**Méthode 3.9**

Pour calculer le projeté orthogonal sur  $V$  d'un vecteur  $x \in E$

- si l'on connaît une base orthonormée de  $V$  (seulement de dimension finie de  $E$ ), on applique la formule de la proposition 3.7;
- si l'on ne connaît qu'une famille génératrice de  $V$  :  $\mathcal{G} = (y_1, \dots, y_p)$ , on utilise la proposition 3.8, on exprime  $y$  comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille  $\mathcal{G}$  et on résout le système donné par :  $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \langle (x - y), y_i \rangle = 0$ .

**Exemple 3.10 :** Soit  $E$  l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique et  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 0\}$ .

Déterminer le projeté orthogonal de  $(1, 1, 1)$  sur  $V$ .

### III. C Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

**Méthode 3.11 (Algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)**

Soit  $(x_1, \dots, x_p)$  une famille libre de vecteurs de  $E$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ , on note  $F_k = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ .

On pose  $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$  ;

puis pour chaque  $k \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$ ,

$$y_{k+1} = P_{F_k^\perp}(x_{k+1}) = x_{k+1} - P_{F_k}(x_{k+1}) = x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k-1} \langle x_{k+1}, e_i \rangle e_i$$

et

$$e_{k+1} = \frac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}.$$

La famille  $(e_1, \dots, e_p)$  ainsi obtenue est orthonormée et vérifie :

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad F_k = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

**Exemple 3.12 :** Déterminer une base orthonormée de  $E = \mathbb{R}_2[X]$  muni du produit scalaire défini par  $\langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ .

### III. D Distance à un sous-espace vectoriel

**Proposition 3.13**

Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$  et  $x \in E$ .

Alors  $P_V(x)$  le projeté orthogonal sur  $V$  de  $x$  est l'unique vecteur  $y_0$  tel que

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\| = d(x, V).$$

**Exemple 3.14 :** Quelle est la distance dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son produit scalaire canonique de  $(1, 1, 1)$  à  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2z = 0\}$  ?