Devoir Surveillé n° 4.
le 28 novembre.

Problème : Autour du théorème de comparaison avec une intégrale

Dans ce problème, on se propose de démontrer le théorème de comparaison avec une intégrale, puis de traiter des exemples et des applications. On terminera par deux contre-exemples.
Une fonction f sera dite **intégrable** sur $[0\,;+\infty[$ lorsqu'elle est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$ et que l'application $x \mapsto \displaystyle\int_0^x |f(t)|\ \mathrm{d}t$ est bornée sur $[0\,;+\infty[$; c'est à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in [0\,;+\infty[,\ \int_0^x |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant M.$$

De même, pour $a \in \mathbb{R}$, une fonction f est dite intégrable sur $[a\,;+\infty[$ lorsqu'elle est continue par morceaux sur $[a\,;+\infty[$ et : $\exists M \in \mathbb{R}^+ \mid \forall x \in [a\,;+\infty[,\ \displaystyle\int_a^x |f(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant M.$

Partie I - Théorème de comparaison avec une intégrale

Dans cette partie, f est une fonction continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k)$, $J_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\mathrm{d}t$ et pour tout entier k non nul, $I_k = \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$.

Q1. Préciser la monotonie des suites (S_n) et (J_n), puis démontrer que pour tout entier k non nul, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k-1)$.

Q2. Démontrer que pour tout entier n non nul, $S_n - f(0) \leqslant J_n \leqslant S_{n-1}$.

Q3. Démontrer enfin les deux résultats :
(1) f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, si et seulement si, la série $\sum f(n)$ converge.
(2) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left[\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t - f(n)\right]$ converge.

Q4. Un exemple.
On pose pour $\alpha > 0$ et $x \in [2\,;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

a) Étudier la monotonie de la fonction f, calculer $\displaystyle\int_2^x f(t)\mathrm{d}t$ et en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

b) Dans le cas où $\alpha = 2$, déterminer en fonction de $\ln 2$, un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Q5. Une application.

On pose pour n entier naturel non nul, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

a) En utilisant le résultat (2) de la question **Q3**, établir que la suite $(\,T_n\,)$ converge. On notera γ sa limite (constante d'Euler).

b) Justifier que, au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ et en déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Q6. Une application sur une série de fonctions.
On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ où pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$, $g_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$.

a) Étudier la convergence normale de cette série de fonctions sur $]0, +\infty[$.

b) On pose pour x fixé non nul, $f(t) = \dfrac{x}{t^2+x^2}$.

Établir que, pour n entier non nul, $\displaystyle\int_1^{n+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^{n} f(t)\mathrm{d}t$.

c) En déduire que, pour tout x non nul, $\dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{x} \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$.

d) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$.

La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} g_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

Partie II - Contre-exemples

Q7. On pose pour $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = |\sin(2\pi x)|$.

a) Calculer pour n entier naturel non nul, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$.

On pourra remarquer que $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \int_n^{n+\frac{1}{2}} f(t)\mathrm{d}t + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+1} f(t)\mathrm{d}t$.

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.

b) Établir que pour $x \in [1\,;+\infty[$, $\displaystyle\int_1^{x} |\sin(2\pi t)|\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}(\lfloor x \rfloor - 1)$.

La fonction f est-elle intégrable sur $[1\,;+\infty[$? Que dire de la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$?

Q8. On se propose de construire un contre-exemple d'une fonction f continue, positive et intégrable sur $[1\,;+\infty[$ telle que $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ diverge.
Pour tout entier n non nul, trouver un réel a_n de sorte que le triangle de base $[n-a_n, n+a_n]$ et de hauteur 1 ait une aire égale à $\dfrac{1}{n^2}$.
Dessiner l'allure d'une courbe de fonction f définie et continue sur $[1, +\infty[$ de la manière suivante : chaque entier naturel n non nul a pour image 1 et autour de chaque n (sur chaque intervalle $[n-a_n, n+a_n]$) tracer l'allure du triangle de base $[n-a_n, n+a_n]$ et de hauteur 1 .
Enfin, la fonction est nulle en dehors de tous les intervalles $[n-a_n, n+a_n]$.
Démontrer que cette fonction f fournit un contre-exemple.

Exercice 1 : Théorème de décomposition de Dunford

Notations :
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On désigne, pour n entier naturel, $n \geqslant 2$:

- $M_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
> (1) $A = D + N$;
> (2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
> (3) N est nilpotente ;
> (4) $DN = ND$.
> De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
> Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Non continuité de l'application $A \mapsto D$

Q9. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables.
$\mathcal{D}$ est-il un espace vectoriel ?
Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$, justifier que l'application de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.

Q10. Démontrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Q11. Si (D, N) est le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A, on note φ l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{D}$ qui à la matrice A associe la matrice $\mathcal{D}$.
Justifier que φ est l'application identité sur $\mathcal{D}$ et en déduire que l'application φ n'est pas continue.

Exercice 2

On considère l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pourra utiliser librement dans cet exercice que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2. Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, justifier que :

$$\exists \rho > 0, \quad \forall \lambda \in]0, \rho\,[, \quad M - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

Démontrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

4. Application
Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que les matrices $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique.
A l'aide des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, prouver que le résultat n'est pas vrai pour les polynômes minimaux.

5. Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
On rappelle que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est une partie connexe par arcs.