Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les résultats doivent être justifiés. Les fautes d'homogénéité seront sanctionnées. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Circuits inductifs

Une bobine réelle est un dipôle constitué par enroulement cylindrique d'un fil électrique. Elle est caractérisée par son inductance L et sa résistance interne r.

A. Bobine réelle.

On considère une bobine réelle d'inductance L et de résistance interne r non nulle. On la modélise par l'association série d'une bobine idéale d'inductance L avec un résistor de résistance r (figure 1).

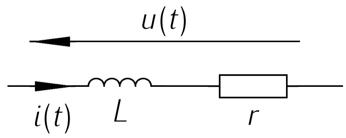


figure 1

1. Donner la relation constitutive de la bobine **réelle**, c'est à dire la
Q1 relation qui lie $u(t)$ à $i(t)$ sur la figure ci-contre (figure 1).
2. En déduire, en fonction de $i(t)$ et ses dérivées, l'expression $p(t)$ de
Q2 la puissance reçue par la bobine réelle à l'instant t.
3. La fonction $i(t)$, intensité du courant qui traverse la bobine réelle,
Q3 peut-elle être discontinue au sens mathématique du terme ? Justifier la réponse.

B. Application d'un échelon de tension.

On utilise la bobine réelle précédente pour réaliser le circuit représenté ci-contre (figure 2).

Un générateur idéal de tension de force électromotrice E est branché en série avec une résistance R et avec à un interrupteur idéal K pour produire un échelon de tension : pour $t < 0$, K est ouvert, et on ferme K à $t = 0$.

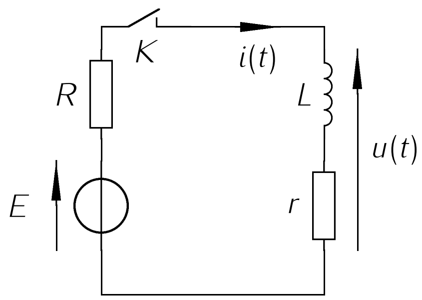


figure 2

Applications numériques :
$L = 0{,}1$ H ; $r = 10$ Ω ; $R = 50$ Ω ; $E = 12$ V.

1. Établir l'équation différentielle régissant les variations
Q4 de l'intensité $i(t)$ dans le circuit pour $t \geq 0$.
2. Mettre cette équation sous la forme canonique.
Q5 On fera apparaitre la constante de temps τ dont on donnera l'expression et la valeur numérique.
Q6 3. Déterminer l'expression de $i(t)$ en justifiant soigneusement.
Q7 4. Tracer soigneusement $i(t)$ en précisant les échelles, la valeur à l'instant initial, celle en régime permanent, ainsi que la tangente à l'origine $\left(\frac{di}{dt}\right)_{0^+}$ (expressions littérales et valeurs numériques).
Q8 5. Déterminer l'expression de $u(t)$ la tension aux bornes de la bobine **réelle**.
Q9 6. Déterminer, en fonction de E, R, r, L, t et τ la puissance $p(t)$ reçue par la bobine réelle à t.
7. Quelle est la valeur de $p(t)$ en régime permanent ?
Q10 Faire l'application numérique et interprétez physiquement.
Q11 8. Quelle serait l'énergie reçue par la bobine réelle si on faisait tendre t vers l'infini ?
9. Comment pourrait-on observer simultanément l'intensité $i(t)$ et la tension $u(t)$ à l'oscilloscope ? On précise que le générateur impose la masse du circuit. Faire un schéma du circuit électrique
Q12 en faisant apparaitre en particulier les branchements de l'oscilloscope.

10. À la place de l'échelon de tension, on souhaite utiliser un générateur délivrant un signal carré et obtenir le même type de signal que précédemment. La fréquence f du signal carré utilisé doit-elle vérifier $f \ll f_M$ ou $f \gg f_M$? Justifier puis estimer la valeur f_M en fonction des données
Q13 du problème.

C. Réponse du circuit au branchement d'un condensateur

On reprend le circuit précédent auquel on a adjoint un condensateur idéal de capacité C en série avec un interrupteur idéal K' (figure 3).
K est fermé depuis assez longtemps pour que le circuit ait atteint le régime permanent.
On suppose que C est initialement déchargé.
À l'instant $t = 0$, on ferme K'.

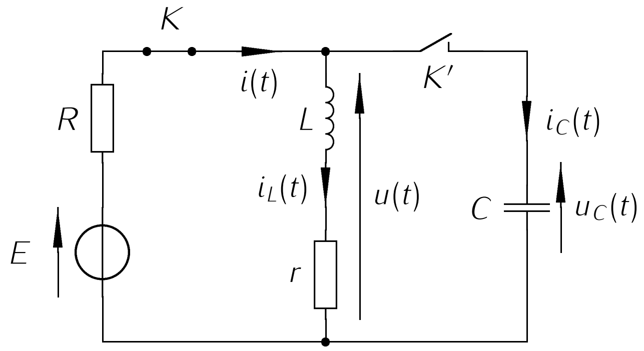


figure 3

Applications numériques : $L = 0{,}1$ H ; $C = 200$ μF ; $r = 10$ Ω ; $R = 50$ Ω ; $E = 12$ V.

1. Déterminer, **en justifiant** chaque réponse, les expressions de u, i, i_L et i_C, définies sur le schéma ci-dessus,
Q14 (a) juste avant la fermeture de K' (à $t = 0^-$),
Q15 (b) puis juste après la fermeture de K' (à $t = 0^+$)
(c) et enfin au bout d'un temps suffisamment long pour at-
Q16 teindre à nouveau un régime permanent.

	u	i	i_L	i_C
à $t = 0^-$				
à $t = 0^+$				
pour $t \to \infty$				

Résumer ensuite les résultats obtenus en reproduisant et en complétant (expression et valeur numérique) le tableau ci-contre.

2. On cherche à établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $i_L(t)$. *À chercher que si vous avez déjà traité toutes les autres questions du DS.*
(a) Écrire la loi des mailles dans la maille de gauche du circuit représenté figure 3.
Q17 Se ramener à une équation différentielle liant i_C, i_L et des constantes (équation 1).
(b) Rappeler la relation constitutive du condensateur et celle de la bobine réelle.
Q18 En déduire la relation liant i_C aux dérivées temporelles de i_L (équation 2).
Q19 (c) En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $i_L(t)$.

James Bond et la physique

Moonraker

Dans le film Moonraker, James Bond est pris au piège dans une centrifugeuse (photo ci-dessous). À partir de l'extrait vidéo, on peut noter que la période de rotation de la centrifugeuse est d'une seconde.

Q20 1. Caractériser le mouvement de Bond.

Q21 2. Donner une estimation du rayon de la trajectoire.

Q22 3. Quelle est l'accélération subie par notre héros ?

Q23 4. Sur le tableau de contrôle de la centrifugeuse, on peut apercevoir des voyants qui s'illuminent au fur et à mesure que la centrifugeuse accélère. À quelle grandeur physique pourrait se rapporter ces voyants ? Quelle est serait l'unité ?

Goldeneye

À la fin du film Goldeneye, le méchant, Alec Trevelyan, chute du sommet d'une antenne. Grâce à un logiciel de pointé, on peut suivre sa chute. On obtient les données suivantes :

temps t (s)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
hauteur h (m)	18	17.97	17.872	17.71	17.49	17.2	16.85	16.43	15.95	15.408	14.8

Q24 1. Rappeler la définition du vecteur vitesse.

Q25 2. Déduire des mesures précédentes la vitesse de Trevelyan au cours du temps. On assimilera la dérivée par rapport au temps au taux d'accroissement.

Q26 3. Rappeler la définition du vecteur accélération.

Q27 4. Déduire des mesures précédentes l'accélération. On assimilera la dérivée par rapport au temps au taux d'accroissement.

Q28 5. Que peut-on dire de l'accélération ? En appliquant la seconde loi de Newton, expliquer si les frottements de l'air ont une influence sur la chute ?

Q29 6. Comment expliquer que $a \neq -g$? (Rappel $g = 9{,}81$ m.s^{-2})

Octopussy

Au début du film Octopussy, James Bond, s'échappe dans un petit avion dissimulé au sein d'un van pour cheval. On s'intéresse à différentes parties du film concernant cet épisode.
Dans un premier temps, partant d'une vitesse nulle, l'avion atteint en 7,0 s une vitesse de 100 nœuds (qu'on peut lire en knots sur l'anémomètre du tableau de bord) en roulant sur une piste rectiligne en direction de camions occupés par des soldats cubains et décolle juste avant la collision. On suppose qu'il accélère de manière uniforme. On rappelle qu'un nœud correspond à une vitesse de 1,9 km.h^{-1}.

Q30 1. Déterminer l'accélération nécessaire (supposée constante) et la comparer à l'accélération de pesanteur $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.

Q31 2. Quelle distance a-t-il alors parcourue ?

3. Stabiliséà une vitesse $v = 250$ nœuds en mouvement rectiligne uniforme à l'altitude $z = h$, l'avion est visé par un missile tiré avec un angle α par rapport à l'horizontale et se déplaçant à une vitesse v_0 constante. Le missile est tiré de l'abscisse $x = 0$ alors que l'avion se trouve à l'abscisse $x = d$ devant le lanceur :

Q32 (a) Écrire les équations horaire du mouvement de l'avion

Q33 (b) Écrire les équations horaire du mouvement du missile en fonction de v_0, α et t. *Remarque : attention, ce n'est pas une question de dynamique, il n'y a pas à se préoccuper des causes du mouvement. Le missile avance en ligne droite à la vitesse v_0.*

Q34 (c) Établir l'équation vérifiée par $\sin(\alpha)$ pour que le missile atteigne sa cible si l'avion ne dévie pas de sa trajectoire. *Astuce : on pourra isoler* $\cos\alpha$ *et exploiter la relation* $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$

(d) On définit $X = \sin\alpha$, montrer que X est solution de $X^2(1+\epsilon^2)+2\epsilon\beta X+\beta^2-1=0$ et donner les expressions de ϵ et β.

Q35 (e) Calculer le déterminant que cette équation. Admet-elle une solution quelle que soit la valeur de v_0 ?

Q36 (f) Calculer α pour $v_0 = \frac{3v}{2}$; $d = 300$ m et $h = 150$ m.

Q37 (g) Quelle est la durée du trajet effectué par le missile avant l'impact ?

Q38 4. En fait, dans le film Octopussy, le missile est équipé de capteurs infrarouges qui lui permettent de s'aligner en permanence sur la direction que prend l'avion. Après son mouvement rectiligne, l'avion effectue un demi-tour circulaire de rayon R dans le plan horizontal pour échapper à l'impact. On suppose qu'il garde sa vitesse initiale v constante durant cette manœuvre. Donner la valeur minimale de R afin que James Bond ne subisse pas une accélération de plus de $5g$ qui entraînerait une perte de connaissance. Quelle est alors la durée de ce demi-tour ?

Q39 5. L'avion perd alors de l'altitude et arrive en rasant le sol en direction d'un hangar de forme rectangulaire muni de deux lourdes portes coulissantes en entrée et des mêmes en sortie. Dans le film, voyant l'avion arriver sur le hangar, les soldats ferment progressivement les quatre portes en les poussant l'une vers l'autre à vitesse constante v_1.

L'avion passe alors de justesse entre les deux portes d'entrée, continue son trajet à l'intérieur du hangar tandis que les portes de sortie continuent à se refermer progressivement. Il effectue alors une rotation de 90° de manière à positionner ses ailes verticalement et non plus horizontalement : ainsi incliné, il peut franchir de justesse l'étroit passage entre les portes de sortie.

Le missile qui le poursuit explose alors dans le hangar. On assimilera la trajectoire de l'avion à un mouvement rectiligne uniforme à vitesse v_2. Sachant que les ailes de l'avion ont une longueur de $l_a = 2{,}3$ m, que les dimensions du cockpit sont une largeur de $l_c = 0{,}70$ m et une hauteur h variant entre $h_1 = 0{,}90$ m en tête de l'avion et $h_2 = 1{,}4$ m sur l'aileron de queue et que l'avion met $t_2 = 8{,}0$ s à franchir la distance $L = 40$ m entre les deux portes.

Q40 6. Calculer les vitesses v_1 et v_2 nécessaires à la réalisation de la cascade.

Q41 7. Dans le film, le tableau de bord affiche une vitesse v_2 de 150 nœuds. Quelle serait alors la longueur L' du hangar ? Est-ce réaliste ?

Q42 8. Question bonus : quel acteur incarne James Bond dans Octopussy ?

Circuits inductifs

Ne parlez pas de u_R ou n'importe quelle autre tension ou courant sans l'avoir défini sur un <u>schéma</u> ! En effet, même si vous dites que u_R est la tension aux bornes de R il reste 2 choix possibles pour la tension et on ne peut pas savoir lequel vous avez considéré.

A. Bobine réelle

1. En convention récepteur, la tension aux bornes de l'inductance pure est $L.\frac{di(t)}{dt}$ et celle aux bornes du résistor est $r.i(t)$.

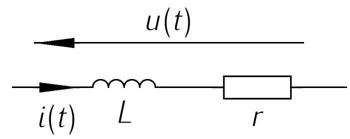


figure 1

Ainsi, aux bornes de l'association série, on a $\boxed{u(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} + ri(t)}$

Q1

Remarque : Il est <u>rigoureusement interdit</u> de faire la moindre erreur à cette question qui ressert dans l'ensemble du problème. Il faut être très prudent et bien adapter la relation constitutive au schéma qui vous est donné et ce sans faute de signe.

Q2 2. Toujours en convention récepteur, la puissance reçue est $\boxed{p(t) = u(t) \cdot i(t) = L \cdot i(t)\dfrac{di(t)}{dt} + ri^2(t)}$.

3. Physiquement, la puissance reçue par un composant ne peut pas être infinie. Or si $i(t)$ était une fonction discontinue au sens mathématique de terme, c'est-à-dire $\frac{di}{dt} \to \pm\infty$, on aurait $p \to \infty$ (et $u \to \pm\infty$). On en déduit que la fonction

Q3 $\boxed{i(t) \text{ ne peut pas subir de discontinuité : } \forall t \quad i(t^-) = i(t^+)}$.

remarque : L'argument mathématique "la fonction est dérivable d'après la relation constitutive, donc continue" n'est ici pas recevable. En effet, à strictement parler la fonction n'est <u>pas</u> dérivable à $t = 0$: il y a une rupture de pente (du même style que $x \mapsto |x|$). On parle d'ailleurs de $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}i}$ en $t = 0^+$ ou en $t = 0^-$, mais pas en $t = 0$.

B. Application d'un échelon de tension

1. Pour $t \geq 0$, K est fermé (Cf figure 2' ci-dessous).

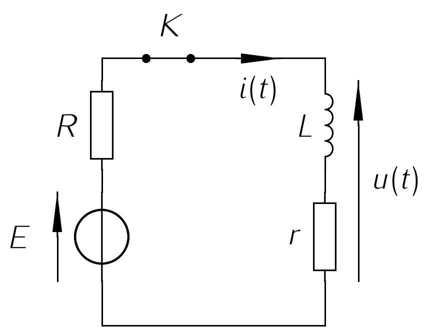
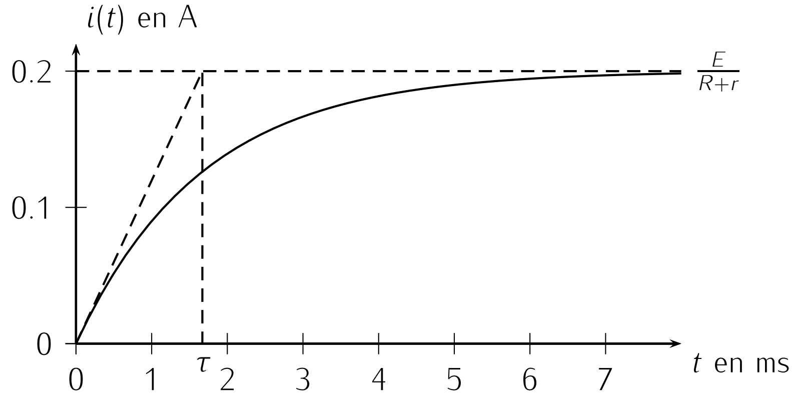


figure 2'



Par application d'une loi des mailles et des relations constitutives, on obtient : $E - Ri(t) - L.\frac{di(t)}{dt} - ri(t) = 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{R+r}{L}i(t) = \dfrac{E}{L}}$

Q4

Q5 2. Et sous la forme canonique, $\boxed{\dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{i(t)}{\tau} = \dfrac{E}{L}}$ avec $\boxed{\tau = \dfrac{L}{R+r} \simeq 1{,}67 \quad \text{ms}}$ (1 chiffre significatif à mettre en théorie vu l'énoncé : 2 ms)

3. La solution de cette équation est la somme de la solution de l'équation homogène $A.\exp(-\frac{t}{\tau})$ où A est une constante d'intégration et d'une solution particulière $\frac{E\tau}{L} = \frac{E}{R+r}$.
On détermine A par application de la continuité de $i(t)$ à $t = 0$: à $t = 0^-$ l'interrupteur est ouvert, d'où $i(0^-) = 0$. Par continuité de i à travers une bobine, $i(0^-) = i(0^+) \Rightarrow 0 = A + \frac{E}{R+r} \Rightarrow A = -\frac{E}{R+r}$.

Q6 On en déduit ensuite $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R+r}\left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right]}$

Q7 4. On trace $i(t)$ sur le graphe ci-dessus.
Pour cela, on utilise $\boxed{i(0) = 0}$, $\boxed{i(\infty) = \frac{E}{R+r} = 0{,}20 \text{ A}}$ et $\boxed{(\frac{di}{dt})_{0^+} = \frac{E}{L} = 120 \text{ A.s}^{-1}}$: la tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = \tau = \frac{L}{R+r} \simeq 1{,}67$ ms.

5. On détermine $u(t)$ par application de la relation constitutive :
$u(t) = L.\frac{di(t)}{dt} + ri(t)$

Q8 $\Rightarrow u(t) = E.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{rE}{R+r}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ soit après simplification : $\boxed{u(t) = \dfrac{E}{R+r}(r + Re^{-\frac{t}{\tau}})}$.

6. En convention récepteur, la bobine reçoit la puissance

Q9 $\boxed{p(t) = u(t).i(t) = \dfrac{E^2}{(R+r)^2}(r + Re^{-\frac{t}{\tau}}).(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

7. En régime permanent, i.e pour $t \gg \tau$, on a $e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$ et $p(t) \to \boxed{p(\infty) = \dfrac{rE^2}{(R+r)^2} = r.i^2(\infty) = 0{,}4 \text{ W}}$.

On peut interpréter le résultat précédent en remarquant qu'en régime permanent, la bobine réelle est équivalente à un résistor de résistance r, la puissance reçue correspond donc à celle que va
Q10 dissiper ce résistor r par $\boxed{\text{effet Joule}}$.

8. L'énergie reçue par la bobine réelle est $E_L(t)$ telle que $p(t) = \frac{dE_L(t)}{dt}$. Or, même en régime permanent, la puissance tend vers une constante strictement positive, $E_L(t)$ reste donc une fonction croissante
Q11 du temps et va tendre vers l'infini : $\boxed{\lim\limits_{t\to\infty} E(t) = +\infty}$.

En effet, l'énergie que l'on continue à fournir à la bobine réelle est dissipée au fur et à mesure dans r par effet Joule.

9. L'oscilloscope ne disposant que d'une masse commune à ses deux voies, on souhaiterait la placer entre la bobine réelle et le résistor. Or la masse est imposée par le générateur. Il apparaît alors un problème de masse entre l'oscilloscope et le générateur qui nécessite l'utilisation d'un transformateur d'isolement ou l'utilisation d'un oscilloscope différentiel. (voir les TP pour le schéma).
Une autre solution est de placer la voie 1 entre le générateur et R, et la voie 2 entre la R et la bobine. La voie 2 visualise donc u. Sur certain oscilloscope numériques, on peut afficher
Q12 $1 - 2 = u_R$ ce qui est proportionnel à i. De cette façon, on visualise simultanément i et u.

10. Pour obtenir le même type de signal, il faut que le régime permanent ait le temps de s'établir ($\simeq 5\tau$), il faut donc que la demi-période du signal créneau imposé soit plus grande que 5τ et donc que sa fréquence f soit inférieure à $\boxed{f_M = \frac{1}{10\tau} = 60 \text{ Hz}}$ (2 échelon de tension sur une période),
Q13 ce qui est assez contraignant.

C. Réponse du circuit au branchement d'un condensateur

1. Détermination de u, i, i_L et i_C : on représente le circuit équivalent à différents instants :

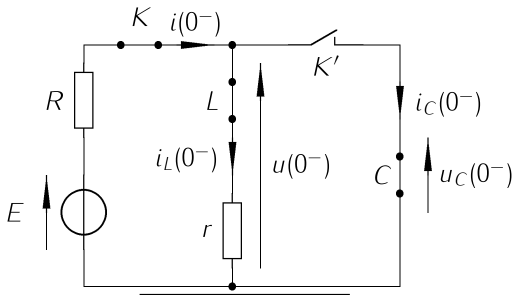


figure 3 à $t = 0^-$

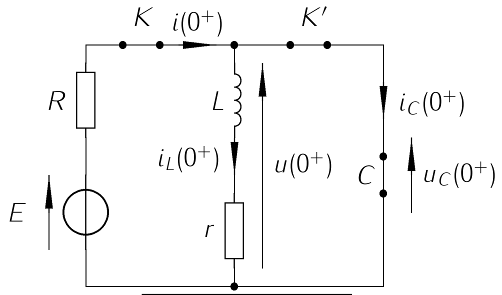


figure 3 à $t = 0^+$

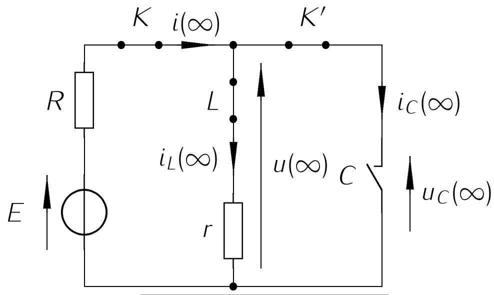


figure 3 pour $t \to \infty$

Q14 (a) à $t = 0^-$, c'est-à-dire en régime permanent avec K' ouvert, L est équivalent à un interrupteur fermé, C est déchargé $u_C = 0$, il est équivalent à un interrupteur fermé : figure ci-dessus à gauche. On relève directement $i_C(0^-) = 0$ (car K' ouvert).

On se trouve avec un circuit équivalent à une seule maille, la loi de Pouillet implique $i(0^-) = i_L(0^-) = \frac{E}{R+r}$. Et enfin $u(0^-) = r.i_L(0^-) = \frac{rE}{r+R}$ ce qui pouvait être aussi trouvé à l'aide des ponts diviseurs de tensions.

Q15 (b) À $t = 0^+$, on a fermé K' d'où le circuit représenté ci-dessus au centre.

La continuité de $i_L(t)$ et de $u_C(t)$ impose déjà $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$, $i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{E}{R+r}$. On a ensuite $u(0^+) = u_C(0^+) = 0$ (branches en parallèle maintenant que K' est fermé). Une loi des mailles sur la maille périphérique implique $E - R.i(0^+) - u_C(0^+) = 0 \Rightarrow i(0^+) = \frac{E}{R}$ et enfin $i_C(0^+) = i(0^+) - i_L(0^+) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R+r} = \frac{rE}{R(R+r)}$.

Q16 (c) Enfin, un régime permanent, comme le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un interrupteur fermé, on aboutit au circuit équivalent représenté ci-dessus à droite. Ce circuit est exactement le même qu'à $t = 0^-$, on a donc les mêmes résultats.

Les résultats et applications numériques sont reportées dans le tableau ci-dessous.

	u	i	i_L	i_C
à $t = 0^-$	$\frac{rE}{r+R} = 2{,}0$ V	$\frac{E}{R+r} = 0{,}20$ A	$\frac{E}{R+r} = 0{,}20$ A	0
à $t = 0^+$	0	$\frac{E}{R} = 0{,}24$ A	$\frac{E}{R+r} = 0{,}20$ A	$\frac{rE}{R(R+r)} = 0{,}04$ A
pour $t \to \infty$	$\frac{rE}{R+r} = 2{,}0$ V	$\frac{E}{R+r} = 0{,}20$ A	$\frac{E}{R+r} = 0{,}20$ A	0

2. Équation différentielle du second ordre vérifiée par $i_L(t)$.

(a) Loi des mailles dans la maille de gauche du circuit figure 5 :

$E - Ri(t) - L.\frac{di_L(t)}{dt} - ri_L(t) = 0$ avec $i(t) = i_L(t) + i_C(t)$ d'où l'équation 1 :

Q17 $\boxed{Ri_C(t) + Ri_L(t) + L.\frac{di_L(t)}{dt} + ri_L(t) = E}$.

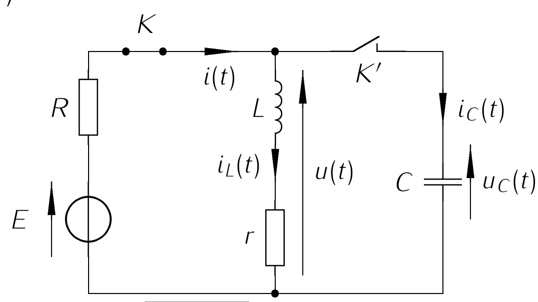


figure 3

(b) Relations constitutives :

$i_C(t) = C.\frac{du_C(t)}{dt} = C.\frac{du(t)}{dt}$ et

$u(t) = L.\frac{di_L(t)}{dt} + ri_L(t)$

Q18 On en déduit l'équation 2 : $\boxed{i_C(t) = LC.\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + rC.\frac{di_L(t)}{dt}}$

(c) En reportant l'équation 2. dans 1., on obtient : $RLC.\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + RrC.\frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + L.\frac{di_L(t)}{dt} + ri_L(t) = E$ et

Q19 en regroupant les termes en $i_L(t)$, $\boxed{\frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + \left[\frac{r}{L} + \frac{1}{RC}\right]\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{r+R}{RLC}i_L(t) = \frac{E}{RLC}}$

James Bond et la physique

Goldeneye

1. On peut calculer la vitesse de Trevelyan grâce au taux d'accroissement de h. On aura alors : $v_k = \frac{h_{k+1}-h_k}{\Delta t}$. L'accélération s'en déduit de la même manière : $a_k = \frac{v_{k+1}-v_k}{\Delta t}$. On obtient les valeurs suivantes :

t (s)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
h (m)	18	17,96	17,87	17,7	17,48	17,19	16,83	16,4	15,92	15,36	14,75
v (m.s^{-1})	-0,33	-0,98	-1,63	-2,28	-2,93	-3,58	-4,23	-4,88	-5,53	-6,18	
a (m.s^{-2})	-6,5	-6,5	-6,5	-6,5	-6,5	-6,5	-6,5	-6,5	-6,5		

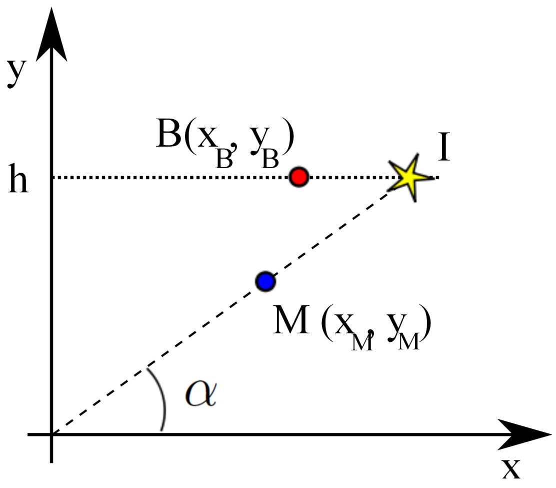
2. On remarque que l'accélération de Treveylan est constante, ce qui signifie que l'on est dans le cas d'une chute libre sans frottement. En effet, en présence de frottements, l'accélération serait du type $a = -g - k * v$ ou $a = -g - \beta v^2$, et l'accélération varierait dans le temps. Ainsi les frottements de l'air sont négligeables.
3. Pour une chute libre sur Terre, l'accélération est $g = 9{,}81$ m.s^{-2}, or la valeur de l'accélération que l'on a calculée est plus faible. Il est probable qu'ils s'agissent d'images de synthèse, mais il est également possible que la scène soit tournée au ralentit avec un mannequin.

Moonraker

1. Bond possède un mouvement circulaire uniforme. On pense tout de suite à $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$.
2. D'après la photo, le rayon R de la trajectoire peut être estimé à 3 ou 4 m.
3. Comme le mouvement est circulaire uniforme, alors l'accélération est donnée par $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$ et $v = \omega R$Soit $a = R\omega^2$, avec $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi$ rad.s^{-1} d'après l'énoncé. Ainsi, avec $R = 3{,}5$ m, on trouve $a = 138$ m.s^{-2} $\simeq 14\,g$.
4. Les voyants peuvent correspondre à l'accélération subie par la personne dans la cabine, mesurée en g. Cela semble cohérent avec la valeur de a trouvée plus haut.

Octopussy

1. On repère la position de l'avion de Bond en coordonées cartésienne. Il possède une accélération γ constante, donc par intégration on a $\ddot{x} = \gamma = Cte$ donc $v = \dot{x} = \gamma t + v_0$ or à $t = 0$ $v = 0$ d'où $v_0 = 0$ et donc $\boxed{\gamma = \frac{v}{t}}$, numériquement on obtient $\gamma = 7{,}5$ m.s^{-2}. On intègre l'expression de v pour trouve la position de l'avion au cours du temps : $\boxed{x = \frac{1}{2}\gamma t^2}$, car à $t = 0$, $x = 0$. Ainsi, au bout de 7 s, l'avion a parcouru une distance : $\boxed{d = 185 \text{ m}}$.
2. Comme souvent en physique, un schéma permet de mettre facilement le problème en équation.



(a) On appelle (x_B,y_B) les coordonnées cartésiennes de James Bond. On sait que l'avion de Bond se place à altitude constante et à vitesse constante donc si l'on choisit l'instant $t = 0$ comme étant celui auquel le missile décolle on a :

$$\begin{cases} \dot{x}_B = v \\ y_B = h \end{cases}$$

Ainsi par intégration :

$$\begin{cases} x_B = vt \\ y_B = h \end{cases}$$

(b) on appelle (x_M,y_M) les coordonnées cartésiennes du missile.
Il possède un vecteur vitesse $\vec{v_0}$ constant et incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal. Ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x}_M = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}_M = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

On intègre par rapport au temps pour trouver les équations horaires. Sachant qu'à $t = 0$ $x_M(t = 0) = 0$ et $y_M(t = 0) = 0$.

$$\begin{cases} x_M = v_0 \cos \alpha t \\ y_M = v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

(c) Il y a impact au point I si $x_M = x_B$ et $y_M = y_B$. On déduit que l'impact à lieu à l'instant $t = \frac{h}{\sin(\alpha) v_0}$, en reportant cette valeur dans la seconde égalité on obtient : $hv_0 \cos(\alpha) = v_0 d \sin(\alpha) + vh$, or on sait que $\cos(\alpha)^2 = 1 - \sin(\alpha)^2$, donc

$$h^2 v_0^2 (1 - \sin \alpha)^2 = (v_0 d \sin(\alpha) + vh)^2$$

(d) En posant $\epsilon = \frac{d}{h}$ et $\beta = \frac{v}{v_0}$ et $X = \sin(\alpha)$ on arrive à l'équation suivante :

$$\boxed{X^2(1 + \epsilon^2) + 2\epsilon\beta X + \beta^2 - 1 = 0}.$$

(e) Cette équation admet une solution si le discriminant réduit est positif, c'est-à-dire : $\Delta' = \beta^2\epsilon^2 - (1 + \epsilon^2)(\beta^2 - 1) \geq 0$ ce qui implique $\boxed{v_0 \geq \frac{h}{\sqrt{h^2+d^2}} v}$. Cette équation admet donc toujours une solution, car pour que le missile puisse rattraper l'avion il faut $v_0 > v$ or $\frac{h}{\sqrt{h^2+d^2}} < 1$.

(f) On prend $\epsilon = 2$ et $\beta = \frac{2}{3}$ on résout donc l'équation du second degré : $5X^2 + \frac{8}{3}X - \frac{5}{9} = 0$, on obtient deux solutions dont une seule est positive : $X = 0{,}16$, soit $\boxed{\alpha = 9°.}$

(g) Le temps de parcours du missile est alors : $\boxed{t = \frac{h}{\sin(\alpha)v_0} = 4{,}7 \text{ s}}$.

3. Dans cette question, l'avion possède un mouvement circulaire uniforme, on sait que son accélération est centripète et vaut $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$, on souhaite une accélération (en norme !) inférieure à $5g$, il faut alors : $\boxed{R > \frac{v^2}{5g} = 355 \text{ m}}$.

4. Dans cette cascade, l'avion parcourt une distance L' en un temps t_2, sa vitesse est donc $\boxed{v_2 = \frac{L'}{t_2} = 5\ m.s^{-1}}$! Lorsque l'avion entre dans le hangar, les doubles portes sont séparées d'une distance $l_a = 2 \times 2{,}3 + 0{,}7 = 5{,}3$ m, puis quand il en ressort elles sont séparées de $h_2 = 1{,}4$ m. Comme elles se rapprochent l'une de l'autre à la vitesse $2v_1$, on trouve $\boxed{v_1 = \frac{2l_a + l_c - h_2}{2t_2} = 24 \text{ cm.s}^{-1}}$.

5. Si l'avion volait réellement à 150 nœuds alors la longueur du hangar serait $\boxed{L = 633 \text{ m}}$. C'est une longueur réaliste (oui oui !) pour un hangar, mais pas pour celui visible dans le film. *Pour cette question, j'accepte tout commentaire.*

6. L'acteur incarnant Bond dans Octopussy est Roger Moore.