MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,
Année scolaire 2025/2026.

Corrigé du DL n° 2.

Exercice 1 Montrons tout d'abord que si $x, x' \in E$ sont tels que $s(x) = s(x')$, alors $f(x) = f(x')$. En effet, on a

$$i(f(x)) = g(s(x)) = g(s(x')) = i(f(x')).$$

Comme i est injective, on a bien $x = x'$.

Soit maintenant $y \in F$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = s(x)$ puisque s est surjective. On pose alors

$$h(y) = f(x),$$

cette définition ne dépendant pas du choix de l'antécédent x de y par s d'après le paragraphe précédent. Par construction de h, si $x \in E$, on a

$$h(s(x)) = f(x) \quad \text{donc} \quad h \circ s = f.$$

Enfin, si $y \in F$, montrons que $g(y) = i(h(y))$. Soit $x \in E$ tel que $y = s(x)$. Alors

$$i(h(y)) = i(h(s(x))) = i(f(x)) = g(s(x)) = g(y).$$

Exercice 2 1. On a $g\left(\overline{f(\emptyset)}\right) = g\left(\overline{\emptyset}\right) = g(F) \subset E = \overline{\emptyset}$, donc $\boxed{\emptyset \in H}$, donc $H \neq \emptyset$.

2. Soit $\boxed{B = \bigcup_{A \in H} A}$. Montrons que B est le plus grand élément de H.

— On a $\boxed{B \in H}$ car

$$g(\overline{f(B)}) = g\left(\overline{f\left(\bigcup_{A\in H} A\right)}\right) = g\left(\overline{\bigcup_{A\in H} f(A)}\right) = g\left(\bigcap_{A\in H} \overline{f(A)}\right)$$
$$\subset \bigcap_{A\in H} g\left(\overline{f(A)}\right) \subset \bigcap_{A\in H} \overline{A} = \overline{\bigcup_{A\in H} A} = \overline{B}.$$

— Par définition, si $A \in H$, alors $A \subset B$, donc B est bien le plus grand élément de H.

3. (a) Soit $y_0 = f(x_0)$. Montrons que $g\left(\overline{f(B')}\right) \subset \overline{B'}$. Or, $\overline{B'} = \overline{B} \cap \overline{\{x_0\}}$, et

$$g\left(\overline{f(B')}\right) = g\left(\overline{f(B \cup \{x_0\})}\right) = g\left(\overline{f(B) \cup \{y_0\}}\right) = g\left(\overline{f(B)} \cap \overline{\{y_0\}}\right) \subset g\left(\overline{f(B)}\right) \cap g\left(\overline{\{y_0\}}\right) \subset g\left(\overline{f(B)}\right)$$

Mais $g\left(\overline{f(B)}\right) \subset \overline{B}$ car $B \in H$. Mais $x_0 \notin g\left(\overline{f(B)}\right)$, donc $g\left(\overline{f(B)}\right) \subset \overline{\{x_0\}}$, donc

$$\boxed{g\left(\overline{f(B')}\right) \subset g\left(\overline{f(B)}\right) \subset \overline{B} \cap \overline{\{x_0\}} = \overline{B'}}.$$

(b) — Comme $B \subset B'$ et que B est le plus grand élément de H, $B' \in H$ est une contradiction : il n'existe pas de tel x_0, donc $\boxed{\overline{B} \subset g\left(\overline{f(B)}\right)}$.

— On a bien sûr $g\left(\overline{f(B)}\right) \subset \overline{B}$ car $B \in H$: l'égalité demandée est prouvée.

4. (a) Par hypothèse, f est injective, et par définition, tout élément de $f(B)$ admet un antécédent par f dans B.

(b) On vient de prouver que la restriction de g à $\overline{f(B)}$ est surjective sur $\overline{B}$. Comme g est injective, $\boxed{\text{la fonction } \varphi : \overline{f(B)} \longrightarrow \overline{B} \text{ définie par } \varphi(y) = g(y) \text{ est une bijection}}$.

(c) On en déduit que la fonction $h : E \longrightarrow F$ définie par

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in B, \\ \varphi^{-1}(x) & \text{sinon} \end{cases}}$$

est une bijection.