Corrigé du EH 7

chapitre 6 exercice 14

1. a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et

$$\frac{1}{k} I_n \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

car $\left\|\frac{1}{k} I_n - 0\right\| = \frac{1}{k}\|I_n\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

De plus $0 \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, donc par caractérisation séquentielle des fermés :

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ n'est pas un fermé de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

b) L'application det est polynomiale en les coefficients de la matrice, c'est à dire en les coordonnées dans la base canonique, donc det est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$.

De plus $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \det^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue, donc

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ est un ouvert de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$ est scindé d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, donc A est trigonalisable. Il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que $T = P^{-1}AP$ et T est triangulaire supérieure, notons $t_1, \dots, t_n$ ses coefficients diagonaux et $\delta = \min\{|t_i| \,;\, i \in [\![1\,;n]\!], t_i \neq 0\}$; donc $\delta > 0$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*, T_k = T + \frac{\delta}{2k} I_n$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*, T_k$ est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont : $(t_i + \frac{\delta}{2k})_{i \in [\![1\,;n]\!]}$; soit $i \in [\![1\,;n]\!]$

- si $t_i = 0$, alors le $i^{\text{ième}}$ coefficient diagonal de T_k est $\frac{\delta}{2k} > 0$;
- si $t_i \neq 0$, alors d'après la seconde inégalité triangulaire $\left|t_i + \frac{\delta}{2k}\right| \geqslant |t_i| - \frac{\delta}{2k} \geqslant \delta - \frac{\delta}{2} > 0$, donc le $i^{\text{ième}}$ coefficient diagonal de T_k est non nul.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*, T_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. De plus $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, donc $PT_kP^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

De plus, $\|T_k - T\| = \frac{\delta}{2k}\|I_n\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $T_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} T$.

Et l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, donc continue. Donc

$$PT_kP^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} PTP^{-1} = A.$$

Donc par caractérisation séquentielle de la densité,

$$\boxed{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

le passage par la trigonalisation permet de donner l'idée d'une solution, mais on peut s'en passer. Solution 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\delta = \min\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{0\}\}$ (ou $\delta = 1$ si cet ensemble est vide). Le minimum est bien défini lorsque l'ensemble est non vide car c'est un ensemble fini.

Alors pour tout $r \in \,]0\,;\delta[, A - rI_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par définition du spectre ($r \notin \mathrm{Sp}(A)$ donc r n'est pas une valeur propre de A).

Donc $A \in \overline{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$. Ce qui achève la solution 2.

2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

a) $AB = A(BA)A^{-1}$ donc AB et BA sont semblables, donc :

$$\boxed{AB \text{ et } BA \text{ ont le même polynôme caractéristique.}}$$

b) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $x \in \mathbb{C}$. Montrons que $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.

Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A$.

De plus $M \mapsto MB$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est de dimension finie, donc $M \mapsto MB$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Donc $A_kB \xrightarrow[k\to+\infty]{} AB$ et $xI_n - A_kB \xrightarrow[k\to+\infty]{} xI_n - AB$.

Or la fonction det est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (d'après 1.b), donc

$$\chi_{A_kB}(x) = \det(xI_n - A_kB) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \det(xI_n - AB) = \chi_{AB}(x).$$

De même, $\chi_{BA_k}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \chi_{BA}(x)$.

Or d'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme $A_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{A_kB} = \chi_{BA_k}$. Donc $\chi_{A_kB}(x) = \chi_{BA_k}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \chi_{BA}(x)$.

Donc par unicité de la limite, $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$, valable pour tout $x \in \mathbb{C}$.

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{le résultat reste vrai pour tout couple } (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 \text{, c'est à dire :} \\ \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \chi_{AB} = \chi_{BA}.\end{array}}$$

3. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Com}(A)$ la comatrice de A.

a) Soit $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

$$(AB) \times \mathrm{Com}(AB)^\top = \det(AB) I_n$$

Donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Com}(AB) &= \left(\det(AB)(AB)^{-1}\right)^\top \\ &= \det(AB)(B^{-1}A^{-1})^\top\end{aligned}$$

$$= \det A(A^{-1})^\top \det B(B^{-1})^\top$$
$$= \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$$

Donc :

$$\boxed{\forall A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Com}(A \times B) = \mathrm{Com}(A) \times \mathrm{Com}(B).}$$

b) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ telles que $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} A, B_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} B$.

D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Com}(A_k \times B_k) = \mathrm{Com}(A_k) \times \mathrm{Com}(B_k)$$

Or :

$$\varphi \;:\; \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M, N & \longmapsto & MN \end{array}$$

est bilinéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie. Donc φ est continue.

Donc : $A_kB_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} AB$.

Et les fonctions coordonnées de Com dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont des fonctions polynomiales en les coordonnées dans la base canonique ; donc Com est continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donc : $\mathrm{Com}(A_kB_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Com}(AB)$.

De plus pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathrm{Com}(A_kB_k) = \mathrm{Com}(A_k)\mathrm{Com}(B_k)$ et par continuité de Com, $\mathrm{Com}(A_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Com}(A)$ et $\mathrm{Com}(B_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Com}(B)$; puis par continuité de φ :

$$\mathrm{Com}(A_kB_k) = \mathrm{Com}(A_k)\mathrm{Com}(B_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(A).$$

Donc, par unicité de la limite,

$$\boxed{\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Com}(A \times B) = \mathrm{Com}(A) \times \mathrm{Com}(B).}$$

4. Soit $\mathcal{D}$ ens des matrices diagonalisables à valeurs propres simples.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc A est trigonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$ avec $t_1, \ldots, t_n$ coeff diagonaux de T.

On pose

$$\delta = \min\{|t_k - t_j|; k, j \in [\![1\,;n]\!], t_k \neq t_j\} \text{ et } D = \mathrm{diag}(1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}})$$

donc $T + xD$ est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont : $t_k + \frac{x}{3}e^{2ik\pi/n}$. Soit $j, k \in [\![1\,;n]\!]$ avec $j \neq k$

1er cas : $t_k = t_j$, donc

$$\left(t_k + \frac{x}{3}e^{2ik\pi/n}\right) - \left(t_j + \frac{x}{3}e^{2ij\pi/n}\right) = \frac{x}{3}\left(e^{2ik\pi/n} - e^{2ij\pi/n}\right) \neq 0$$

car $j \neq k$ et $\frac{2ik\pi}{n}, \frac{2ik\pi}{n} \in]0\,;2\pi]$;

2e cas : $t_k = t_j$, donc

$$\begin{aligned} &\left|\left(t_k + \frac{x}{3}e^{2ik\pi/n}\right) - \left(t_j + \frac{x}{3}e^{2ij\pi/n}\right)\right| \\ &\geqslant |t_k - t_j| - \left|\frac{x}{3}\left(e^{2ik\pi/n} - e^{2ij\pi/n}\right)\right| \\ &\geqslant \delta - \frac{2\delta}{3} > 0 \end{aligned}$$

Donc $T + xD$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont 2 à deux distincts ; donc son polynôme caractéristique est simplement scindé, donc $T + xD \in \mathcal{D}$. Donc : $\forall k \geqslant 2, T_k = T + \frac{\delta}{k}D \in \mathcal{D}$ et $T_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} T$. Donc : $\forall k \geqslant 2, A_k = PT_kP^{-1} \in \mathcal{D}$ et $T_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} T$ car $M \mapsto PMP^{-1}$ est linéaire sur mcn de dimension finie donc continue.

Conclusion, d'après la caractérisation séquentielle de la densité,

$$\boxed{\text{l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres simples est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

remarque : on peut remplacer la matrice D par n'importe quelle matrice diagonale dont les coefficients sont 2 à deux distincts. On peut par exemple poser : $T_k = T + \mathrm{diag}(1/k, 2/k, \ldots, n/k)$. Comme $\frac{n}{k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, à partir d'un certain rang $2n/k < \delta$ et on verifie de même que les coefficients de T_k sont 2 à deux distincts.

chapitre 6 exercice 17 (CCINP 1)

1. Posons $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = x^n$.

(f_n) est une suite à valeurs dans E et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{||f_n||_\infty}{||f_n||_1} = \dfrac{1}{\frac{1}{n+1}} = n+1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{||f_n||_\infty}{||f_n||_1} = +\infty$.
Donc $||\ ||_\infty$ et $||\ ||_1$ ne sont pas équivalentes.

2. a) u est clairement linéaire.
De plus, $\forall f \in E$, $|u(f)| = |f(0)| \leqslant 1.||f||_\infty$.
Donc u est continue sur E muni de la norme $||\ ||_\infty$.

b) On remarque que $F = u^{-1}(\{0\})$.
De plus, $\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.
Donc F est l'image réciproque d'un fermé, par une application continue sur E, muni de la norme $||\ ||_\infty$.
Donc F est un fermé de E pour la norme $||\ ||_\infty$.

3. a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$||f_n - c||_1 = \displaystyle\int_0^1 |f_n(t) - c(t)|dt = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(t) - c(t)|dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 |f_n(t) - c(t)|dt.$

Or, $\forall t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $f_n(t) - c(t) = 0$.

Donc $||f_n - c||_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nt)\,dt$.

Donc $||f_n - c||_1 = \dfrac{1}{2n}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right[$ et $\left]\dfrac{1}{n}, 1\right]$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \longrightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^+} f_n(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^-} f_n(x) = 1 = f_n(\frac{1}{n})$ donc f_n continue en $\frac{1}{n}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,1]$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$.

Donc (f_n) est une suite à valeurs dans F.

Remarque : le tracé de la courbe de f_n peut suffire à justifier la continuité de f_n.

D'après 3.(a), $||f_n - c||_1 = \dfrac{1}{2n}$.

Donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} ||f_n - c||_1 = 0$.
Donc la suite (f_n), à valeurs dans F, converge vers c (au sens de la norme $||\ ||_1$).

Donc $c \in \overline{F}$.
Or $c \notin F$ (car $c(0) = 1 \neq 0$).
Donc $F \neq \overline{F}$.
Donc F n'est pas un fermé pour la norme $||\ ||_1$.