DEVOIR MAISON 6 (Réduction)

Corrigé

Problème 1 : *Extrait CCP PSI 2019*

Partie I - Eléments propres d'une matrice

1.Par définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre associé, on a $\lambda x = Ax$ ce qui signifie que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $[\lambda x]_i = [Ax]_i$ (en notant ainsi le $i$ème cœfficient du vecteur-colonne) donc par définition du produit matriciel :

$$\boxed{\forall\, i \in [\![1,n]\!], \quad \lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j.}$$

2. Comme x est un vecteur non nul, on a $|x_{i_0}| > 0$.
D'après la question précédente appliquée à i_0 et par inégalité triangulaire, on obtient :

$$|\lambda x_{i_0}| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} x_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|\ |x_j|\,.$$

En divisant par $|x_{i_0}| > 0$, cela donne :

$$|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|\ \frac{|x_j|}{|x_{i_0}|}$$

Par définition de i_0, on a $\forall\, j \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{|x_j|}{|x_{i_0}|} \leq 1$ donc en multipliant par $|a_{i_0,j}| \geq 0$ puis en sommant, on obtient :

$$\boxed{|\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|.}$$

Or, on a $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \leq \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right\}$ d'où :

$$\boxed{|\lambda| \leq \max_{i \in [\![1,n]\!]} \left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right\}.}$$

3. En appliquant **Q2.**, on obtient $|\lambda| \leq \mathrm{Max}\{|\alpha| + |\beta|, |\alpha| + 2|\beta|\}$ et puisque $|\alpha| + |\beta| \leq |\alpha| + 2|\beta|$, on obtient :

$$\boxed{|\lambda| \leq |\alpha| + 2|\beta|.}$$

4. La question **Q3.** appliquée avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ donne $|\lambda| \leq 2$.
En conséquence, $\dfrac{\lambda}{2}$ est un réel compris entre -1 et 1 et comme cos réalise une surjection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$:

$$\exists\, \theta \in [0,\pi] \ / \ \frac{\lambda}{2} = \cos(\theta) \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\exists\, \theta \in [0,\pi] \ / \ \lambda = 2\cos(\theta).}$$

5. Pour alléger l'écriture, notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n(X) = \chi_{A_n(0,1)}(X)$.

Ainsi, $D_1 = X$, $D_2 = X^2 - 1$ et pour tout $n \geq 3$: $\quad D_n = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & X & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{[n]}$

En développant ce déterminant suivant la première colonne, on trouve :

$$D_n = XD_{n-1} + (-1).(-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & X & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & X & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

En développant ce déterminant suivant la première ligne, on trouve :

$$D_n = XD_{n-1} - D_{n-2} \text{ ou } D_n(X) = XD_{n-1}(X) - D_{n-2}(X).$$

Par définition de U_n, on obtient finalement :

$$\boxed{\forall\, n \geq 3, \quad U_n = 2XU_{n-1} - U_{n-2}.}$$

6. Fixons θ dans $]0, \pi[$. On a donc $\sin(\theta) \neq 0$.
Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, H_n l'assertion : « $U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$. »

- *Initialisation :*
  $U_1(\cos\theta) = D_1(2\cos\theta) = 2\cos\theta = \frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}$ car $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\ \sin\theta$.
  $U_2(\cos\theta) = D_2(2\cos\theta) = 4\cos^2\theta - 1$.
  Or, $\sin(3\theta) = \sin(2\theta+\theta) = \sin(2\theta)\cos(\theta)+\cos(2\theta)\sin(\theta) = 2\sin(\theta)\cos^2(\theta)+(2\cos^2(\theta)-1)\sin(\theta)$.
  Ainsi, on a bien $\frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)} = U_2(\cos\theta)$.
- *Hérédité :* Supposons H_n et H_{n+1} vraies pour un entier n fixé supérieur ou égal à 1.
  Montrons que H_{n+2} est vraie.
  D'après **Q5.** et ces hypothèses :

$$U_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta\ U_{n+1}(\cos\theta) - U_n(\cos\theta) = \frac{2\cos\theta\ \sin((n+2)\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

En utilisant les formules :

$$\forall\,(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \text{ et } \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),$$

il vient :

$$\begin{aligned} U_{n+2}(\cos\theta) &= \frac{2\cos(\theta)\sin((n+2)\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((n+2)\theta)\cos(\theta) - \cos((n+2)\theta)\sin(\theta)}{\sin(\theta)} \\ &= \frac{\sin((n+2)\theta)\cos(\theta) + \cos((n+2)\theta)\sin(\theta)}{\sin(\theta)} \\ &= \frac{\sin((n+3)\theta)}{\sin(\theta)}. \end{aligned}$$

Plutôt que les formules de trigonométrie, on pouvait aussi utiliser les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} 2\cos(\theta)\sin((n+2)\theta) - \sin((n+1)\theta) &= 2\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\frac{e^{i(n+2)\theta} - e^{-i(n+2)\theta}}{2i} - \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{2i} \\ &= \frac{1}{2i}\left(e^{i(n+3)\theta} - e^{-i(n+1)\theta} + e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+3)\theta} - e^{i(n+1)\theta} + e^{-i(n+1)\theta}\right) \\ &= \frac{e^{i(n+3)\theta} - e^{-i(n+3)\theta}}{2i} = \sin((n+3)\theta). \end{aligned}$$

On a donc prouvé que H_{n+2} est vraie.

- *Conclusion :* Nous avons prouvé par récurrence double que

$$\boxed{\forall\,\theta \in]0,\pi[, \quad \forall\,n\in\mathbb{N}^*, \quad U_n(\cos\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.}$$

7. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $j\in[\![1,n]\!]$. Notons $\theta_j = \dfrac{j\pi}{n+1}$.
Remarquons que $0<\theta_j<\pi$. On a donc d'après **Q6.** :

$$\chi_{A_n(0,1)}(2\cos\theta_j) = U_n(\cos\theta_j) = \frac{\sin((n+1)\theta_j)}{\sin(\theta_j)} = \frac{\sin(j\pi)}{\sin(\theta_j)} = 0.$$

On en déduit que $2\cos(\theta_j)$ est une valeur propre de $A_n(0,1)$.
De plus, les θ_j sont deux à deux distincts pour $j\in[\![1,n]\!]$ et ils appartiennent à $[0,\pi]$.
Comme la fonction cos est injective sur $[0,\pi]$, on en déduit que les $2\cos(\theta_j)$ pour $j\in[\![1,n]\!]$ sont n valeurs propres distinctes de $A_n(0,1)$.
Comme la matrice $A_n(0,1)$ est d'ordre n, elle admet au plus n valeurs propres comptées avec leurs multiplicités, il n'y a donc pas d'autres valeurs propres et chaque valeur propre est de multiplicité 1.
De plus, les sous-espaces propres associés sont tous de dimension 1 (car leur dimension est supérieure à 1 par définition d'une valeur propre et inférieure à la multiplicité).

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{Sp}((A_n(0,1)) = \left\{2\cos\left(\dfrac{j\pi}{n+1}\right), j\in[\![1,n]\!]\right\}, \text{ toutes les valeurs propres sont simples} \\ \text{et les sous-espaces propres associés sont donc de dimension 1.}\end{array}}$$

8. Comme x est un vecteur non nul, x est un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$ si et seulement si $(A_n(0,1)-2\cos(\theta_j)I_n)x=0$.
Pour obtenir l'équivalence, il suffit d'écrire cette égalité matricielle en distinguant ligne 1, lignes 2 à $n-1$ et ligne n.
Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{c}x \text{ est un vecteur propre de } A_n(0,1) \text{ associé à la valeur propre } 2\cos(\theta_j) \text{ si et seulement si :} \\ \left\{\begin{array}{rcl} -2\cos(\theta_j)x_1 + x_2 &=& 0 \\ \forall k\in[\![2,n-1]\!],\ x_{k-1}-2\cos(\theta_j)x_k + x_{k+1} &=& 0 \\ x_{n-1}-2\cos(\theta_j)x_n &=& 0\end{array}\right. .\end{array}}$$

9. Les suites de l'ensemble E sont des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, d'équation caractéristique $r^2-2\cos(\theta_j)r+1=0$ qui a pour discriminant :

$$4\left(\cos(\theta_j)\right)^2 - 4 = -4\left(\sin(\theta_j)\right)^2 < 0$$

car $\theta_j = \frac{j\pi}{n+1} \in]0,\pi[$.
On en déduit que les racines de l'équation sont complexes conjuguées, égales à :

$$\cos(\theta_j)+i\sin(\theta_j) = e^{i\theta_j}, \text{ et } \cos(\theta_j)-i\sin(\theta_j) = e^{-i\theta_j}.$$

On obtient donc par le cours que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à E si et seulement s'il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad u_k = A\cos(k\theta_j) + B\sin(k\theta_j).$$

De plus, $u_0=0$ si et seulement si $A\times 1 + B\times 0 = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $A=0$.
Dans ce cas, on a $u_{n+1} = B\sin((n+1)\theta_j) = B\sin(j\pi) = 0$.
On en déduit que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{l'ensemble des suites } (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ de } E \text{ telles que } u_0 = u_{n+1} = 0 \text{ est l'ensemble} \\ \left\{(B\sin(k\theta_j))_{k\in\mathbb{N}},\ B\in\mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left\{(\sin(k\theta_j))_{k\in\mathbb{N}}\right\}.\end{array}}$$

10. Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \sin(k\theta_j)$.
D'après la question précédente, $u_0 = u_{n+1} = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} = 0$.
En distinguant les indices $k = 1$, $k \in [\![2, n-1]\!]$ et $k = n$, on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 - 2\cos(\theta_j)u_1 + u_2 & = & 0 \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!],\ u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} & = & 0 \\ u_{n-1} - 2\cos(\theta_j)u_n + u_{n+1} & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2\cos(\theta_j)u_1 + u_2 & = & 0 \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!],\ u_{k-1} - 2\cos(\theta_j)u_k + u_{k+1} & = & 0 \\ u_{n-1} - 2\cos(\theta_j)u_n & = & 0 \end{array} \right.$$

De plus, $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \neq 0_{n,1}$ puisque $u_1 = \sin(\theta_j) \neq 0$.

Ainsi, d'après **Q.8**, $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $A_n(0,1)$ associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$.
Comme le sous-espace propre associé à la valeur propre $2\cos(\theta_j)$ est de dimension 1, on en déduit que $\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\right)$ en est une base (car c'est une famille libre $E_{2\cos(\theta_j)}(A_n(0,1))$ puisque constituée d'un unique vecteur non nul, de cardinal $1 = \dim(E_{2\cos(\theta_j)}(A_n(0,1)))$).
Ainsi :

$$\boxed{E_{2\cos(\theta_j)}(A_n(0,1)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sin(\theta_j) \\ \sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix}\right)}$$

11. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- *Cas $\beta = 0$:* On a $A_n(\alpha, 0) = \alpha I_n$.
  Ainsi :

  $\boxed{\alpha \text{ est l'unique valeur propre de } A_n(\alpha,0) \text{ et le sous-espace propre associé est } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}).}$

- *Cas $\beta \neq 0$:* Remarquons qu'on a $A_n(\alpha,\beta) = \alpha I_n + \beta A_n(0,1) = P(A_n(0,1))$ en notant $P = \alpha + \beta X$.
  Soit λ une valeur propre de $A_n(0,1)$.
  Il existe $x \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $A_n(0,1)x = \lambda x$ et donc $P(A_n(0,1))x = P(\lambda)x$.
  Puisque x est non nul, on en déduit que $\alpha + \beta\lambda$ est une valeur propre de $A_n(\alpha,\beta)$.
  Si $x \in E_\lambda(A_n(0,1))$ alors $A_n(0,1)x = \lambda x$ donc $P(A_n(0,1))x = P(\lambda)x$ donc $x \in E_{\alpha+\beta\lambda}(A_n(\alpha,\beta))$ d'où l'inclusion $E_\lambda(A_n(0,1)) \subset E_{\alpha+\beta\lambda}(A_n(\alpha,\beta))$.
  En appliquant ces résultats, on obtient que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\alpha + 2\beta\cos(\theta_j) \in \mathrm{Sp}(A_n(\alpha,\beta))$ et $E_{2\cos(\theta_j)}(A_n(0,1)) \subset E_{\alpha+2\beta\cos(\theta_j)}(A_n(\alpha,\beta))$.
  Comme $\beta \neq 0$, on a ainsi déterminé n valeurs propres distinctes de $A_n(\alpha,\beta)$ et $A_n(\alpha,\beta)$ est une matrice d'ordre n donc il n'y a pas d'autres valeurs propres et ses sous-espaces propres sont tous de dimension 1. Par égalité des dimensions, l'inclusion donnée ci-dessus sur les sous-espaces propres est donc une égalité. On en déduit que :

  $$\boxed{\mathrm{Sp}(A_n(\alpha,\beta)) = \{\alpha + 2\beta\cos(\theta_j),\ j \in [\![1,n]\!]\}}$$

  et :

  $$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ E_{\alpha+2\beta\cos(\theta_j)}(A_n(\alpha,\beta)) = E_{2\cos(\theta_j)}(A_n(0,1)) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \sin(\theta_j) \\ \sin(2\theta_j) \\ \vdots \\ \sin(n\theta_j) \end{pmatrix}\right).}$$

Partie II - Matrices par blocs

12. Un produit matriciel par blocs donne : $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ CD-DC & D \end{pmatrix}$.
Par hypothèse, C et D commutent donc $CD-DC = 0_n$ d'où :

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}}$$

13. On sait d'après le cours que si M est une matrice triangulaire par blocs, $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ 0_n & M_4 \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} M_1 & 0_n \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$, alors $\det(M) = \det(M_1)\times\det(M_4)$. Par propriété du déterminant, on a alors :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)\times\det\left(\begin{pmatrix} D & 0_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} AD-BC & B \\ 0_n & D \end{pmatrix}\right)$$
$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right)\times\det(D)\times\det(I_n) = \det(AD-BC)\times\det(D).$$

Or, $\det(I_n) = 1$ et comme D est inversible, on a $\det(D) \neq 0$.
Ainsi, en simplifiant, on obtient le résultat souhaité :

$$\boxed{\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD-BC)}$$

14. Raisonnons par l'absurde : supposons que pour tout $p_0 \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \geqslant p_0$ tel que la matrice $D + \dfrac{1}{p}I_n$ ne soit pas inversible. Alors il existe une infinité de p dans $\mathbb{N}^*$ tel que la matrice $D + \dfrac{1}{p}I_n$ ne soit pas inversible c'est-à-dire tel que $-\dfrac{1}{p}$ soit une valeur propre de D. La matrice D admet donc une infinité de valeurs propres distinctes, ce qui est absurde puisqu'elle en admet au plus n.

$$\boxed{\text{Il existe } p_0 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que pour tout } p \geqslant p_0, \text{ la matrice } D + \frac{1}{p}I_n \text{ soit inversible.}}$$

15. Soit $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$, la matrice $D + \dfrac{1}{p}I_n$ soit inversible. Soit $p \geqslant p_0$.
Comme les matrices D et C commutent, on a $\left(D + \dfrac{1}{p}I_n\right)C = DC + \dfrac{1}{p}C = CD + \dfrac{1}{p}C = C\left(D + \dfrac{1}{p}I_n\right)$ donc les matrices $D + \dfrac{1}{p}I_n$ et C commutent. D'après la question **Q13.**, on a alors :

$$\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D + \frac{1}{p}I_n \end{pmatrix}\right) = \det\left(A\left(D + \frac{1}{p}I_n\right) - BC\right)$$

c'est-à-dire $f(\frac{1}{p}) = g(\frac{1}{p})$ $(*)$.
Comme les fonctions f et g sont continues en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$.
Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{1}{p} = 0$, on a par composition $\lim\limits_{p\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{p}\right) = f(0)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} g\left(\dfrac{1}{p}\right) = g(0)$.
Par passage à la limite dans l'égalité $(*)$, on en déduit que $f(0) = g(0)$ c'est-à-dire :

$$\boxed{\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \det(AD-BC).}$$

16. Déterminons le polynôme caractéristique de N. On a :

$$\chi_N(X) = \det(XI_{2n} - N) = \det\left(\begin{pmatrix} XI_n & -I_n \\ -M & XI_n \end{pmatrix}\right).$$

Comme $(-M)(XI_n) = -XM = (XI_n)(-M)$, on obtient par l'égalité (1) :

$$\chi_N(X) = \det(X^2 I_n - M) = \chi_M(X^2).$$

Soit $\mu \in \mathbb{C}$. On a donc :

$$\mu \in \mathrm{Sp}(N) \Leftrightarrow \chi_N(\mu) = 0 \Leftrightarrow \chi_M(\mu^2) = 0 \Leftrightarrow \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M).$$

Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(N) = \{\mu \in \mathbb{C}\ ;\ \mu^2 \in \mathrm{Sp}(M)\}}$$

17. Par hypothèse, on a $x \neq 0_{n,1}$ et $Mx = \mu^2 x$.
Ainsi, on a $y = \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} \neq 0_{2n,1}$ (ce vecteur a au moins une de ces n premières coordonnées non nulle) et un calcul matriciel par blocs donne :

$$Ny = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ M & 0_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu x \\ Mx \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x \\ \mu x \end{pmatrix} = \mu y.$$

Ainsi :

$$\boxed{y \text{ est vecteur propre de } N \text{ associé à la valeur propre } \mu.}$$

18. On suppose que M est inversible.
Si 0 était une valeur propre de N alors d'après **Q16.**, $0^2 = 0$ serait une valeur propre de M et donc M ne serait pas inversible, ce qui est absurde.
On en déduit que 0 n'est pas une valeur propre de N donc N est inversible.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est inversible alors } N \text{ est inversible.}}$$

On suppose que M est diagonalisable.
Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de M.
Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tel que $Mx_k = \lambda_k x_k$.
On sait que 0 n'est pas une valeur propre de M donc pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\lambda_k \in \mathbb{C}^*$ donc λ_k admet deux racines carrées μ_k et $-\mu_k$ distinctes.
Notons pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $y_k = \begin{pmatrix} x_k \\ \mu_k x_k \end{pmatrix}$ et $z_k = \begin{pmatrix} x_k \\ -\mu_k x_k \end{pmatrix}$.
D'après les questions **Q16** et **Q17**, la famille $(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$ est une famille de vecteurs propres de N.
Montrons qu'il s'agit d'une famille libre de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$.
Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^{2n}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k z_k = 0_{2n,1}$.
On a alors $\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) x_k \\ \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) \mu_k x_k \end{pmatrix} = 0_{2n,1}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) x_k = 0_{n,1}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) \mu_k x_k = 0_{n,1}$.
Comme la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, on en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_k + \beta_k = 0$ et $(\alpha_k - \beta_k)\mu_k = 0$ avec $\mu_k \neq 0$ d'où $\alpha_k = \beta_k = 0$.
Ainsi, $(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ de cardinal $2n = \dim\big(\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})\big)$ donc c'est une base de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de N.

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est diagonalisable alors } N \text{ est diagonalisable.}}$$

Problème 2 : Deux démonstrations du théorème de Cayley-Hamilton
Méthode 1 : par les matrices compagnons

Q1 a) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, posons $u_k = f^k(x)$.
On a pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $f(u_k) = f(f^k(x)) = f^{k+1}(x) = u_{k+1}$.
Pour $k = n-1$, on a $f(u_{n-1}) = f(f^{n-1}(x)) = f^n(x)$.
Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k$.
On en déduit la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$:

$$\boxed{\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.}$$

Q1 b) Notons $A = \mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f)$.
Les polynômes caractéristiques de f et A sont égaux donc $\chi_f = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} X & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ -1 & X & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix}$.

Par l'opération $L_1 \leftarrow \sum_{k=1}^{n} X^{k-1} L_k$, on obtient :

$$\chi_f = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & & \vdots & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X - a_{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{où } P(X) = -\sum_{k=1}^{n-1} a_{k-1} X^{k-1} + X^{n-1}(X - a_{n-1}).$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\chi_f = (-1)^{n+1} P(X) (-1)^{n-1} = P(X)$$

car le déterminant de taille $n-1$ obtenu est celui d'une matrice triangulaire supérieure dont tous les cœfficients diagonaux valent -1.
Ainsi :

$$\boxed{\chi_f = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.}$$

Q1 c) On a $\chi_f(f) = f^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$ donc :

$$\chi_f(f)(x) = f^n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x) = f^n(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k = 0_E$$

d'après Q1a).
Ainsi :

$$\boxed{\chi_f(f)(x) = 0_E.}$$

Q2 a) Considérons l'ensemble $A = \{\ell \in \mathbb{N}^*, \big(x, f(x), \dots, f^{\ell-1}(x)\big) \text{ est libre}\}$.
On constate que A est une partie de $\mathbb{N}$ qui a les propriétés suivantes :
- A est non vide car la famille (x) est libre puisque $x \neq 0_E$ donc $1 \in A$,

- A est majorée par n puisque si $\ell \in A$, $\big(x, f(x), \dots, f^{\ell-1}(x)\big)$ est une famille libre de E donc son cardinal, qui est égal à ℓ, est inférieur à la dimension de E, qui est égale à n.

On en déduit que A admet un maximum k qui est compris entre 1 et n.
Pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, on note désormais $e_j = f^j(x)$.
Pour tout $j \in [\![0, k-2]\!]$, $f(e_j) = f(f^j(x)) = f^{j+1}(x) = e_{j+1}$ donc $f(e_j) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
De plus, par définition de k, la famille $\big(x, f(x), \dots, f^{k-1}(x)\big)$ est libre et la famille $\big(x, f(x), \dots, f^{k}(x)\big)$ est liée donc $f(e_{k-1}) = f^k(x) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
Comme pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $f(e_i) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$, on en déduit par linéarité de f que $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est stable par f.
Ainsi :

il existe un entier k compris entre 1 et n tel que $\mathscr{F} = \big(x, f(x), \dots, f^k(x)\big)$ est libre et $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est stable par f.

Q2 b) On note toujours pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, $e_j = f^j(x)$.
Comme la famille $(e_0, \dots, e_{k-1})$ est une famille libre de E, par le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en une base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_{n-1})$ de E (car $\dim(E) = n$).
Comme $\mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_{k-1})$ est stable par f, on sait par le cours que la matrice de f dans cette base est triangulaire par blocs :

$$\boxed{\mathscr{M}at_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix} \text{ avec } A = \mathscr{M}at_{\mathscr{F}}(\widetilde{f}) \text{ où } \widetilde{f} \text{ est l'endomorphisme induit par } f \text{ sur } F = \mathrm{Vect}(\mathscr{F}).}$$

Q2 c) Calculons le polynôme caractéristique de f en calculant celui de la matrice obtenue à la question précédente. Comme la matrice est triangulaire par blocs, on a :

$$\chi_f = \begin{vmatrix} XI_k - A & -B \\ (0) & XI_{n-k} - C \end{vmatrix} = \det(XI_k - A)\det(XI_{n-k} - C) = \chi_A . \chi_C = \chi_{\widetilde{f}} . \chi_C = \chi_C . \chi_{\widetilde{f}} .$$

Ainsi, $\chi_f(f) = \chi_C(f) \circ \chi_{\widetilde{f}}(f)$ donc $\chi_f(f)(x) = \chi_C(f)\big(\chi_{\widetilde{f}}(f)(x)\big)$.
Comme $x \in F$, on a aussi $\chi_{\widetilde{f}}(f)(x) = \chi_{\widetilde{f}}(\widetilde{f})(x) = 0_E$ en appliquant la question 1 avec $\widetilde{f} \in \mathscr{L}(F)$.
Ainsi, $\chi_f(f)(x) = \chi_C(f)(0_E) = 0_E$.

$$\boxed{\chi_f(f)(x) = 0_E.}$$

Q3 On a montré que pour tout vecteur x non nul, $\chi_f(f)(x) = 0_E$ et ceci est encore vrai pour le vecteur nul car $\chi_f(f) \in \mathscr{L}(E)$.
On en déduit que :

$$\boxed{\chi_f(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

Méthode 2 : par trigonalisation

Q4 Par le théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{C}$ donc u est trigonalisable.
Ainsi :

il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.

Q5 Comme A et T représentent un même endomorphisme dans deux bases, elles sont semblables donc $\chi_A = \chi_T$. Comme T est triangulaire, on en déduit que :

$$\boxed{\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i).}$$

Q6 Par lecture sur la matrice T, on a $u(e_1) = \lambda_1 e_1$.
On a donc $P_1(u)(e_1) = (u - \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_1) = u(e_1) - \lambda_1 e_1 = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1)$. Il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $x = \alpha e_1$.
On a donc par linéarité, $P_1(u)(x) = \alpha P_1(u)(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathrm{Vect}(e_1),\ P_1(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Q7 a) Soit $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$. On a $P_k(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Comme $P_{k+1} = (X - \lambda_{k+1})P_k$, on a $P_{k+1}(u) = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}) \circ P_k(u)$ donc :

$$P_{k+1}(u)(x) = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})\big(P_k(u)(x)\big) = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})\big(0_{\mathbb{C}^n}\big) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k),\ P_{k+1}(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Q7 b) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$, on note $t_{i,j}$ le cœfficient de la matrice T d'indice (i,j).
Comme la matrice T est triangulaire supérieure, si $i > j$ alors on a $t_{i,j} = 0$.
Par lecture sur la matrice, on a donc :

$$u(e_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} t_{i,k+1} e_i = \sum_{i=1}^{k} t_{i,k+1} e_i + \lambda_{k+1} e_{k+1}.$$

On a donc $(u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1}) = u(e_{k+1}) - \lambda_{k+1}e_{k+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} t_{i,k+1} e_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$.

$$\boxed{(u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1}) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k).}$$

Q7 c) D'après la question b), on peut appliquer $\mathscr{P}(k)$ avec $x = (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1})$.
On obtient que $P_k(u)\big((u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1})\big) = 0_{\mathbb{C}^n}$ c'est-à-dire $P_k(u) \circ (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})(e_{k+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Or, $P_k(u) \circ (u - \lambda_{k+1}\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}) = \big(P_k(X - \lambda_{k+1})\big)(u) = P_{k+1}(u)$.
D'où :

$$\boxed{P_{k+1}(u)(e_{k+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Q7 d) On a donc prouvé que pour tout $j \in [\![1, k+1]\!]$, $P_{k+1}(u)(e_j) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Comme $P_{k+1}(u)$ est linéaire, on en déduit que :

$$\boxed{\mathscr{P}(k+1)\ :\ \forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{k+1}),\ P_{k+1}(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Q8 On a montré $\mathscr{P}(1)$ à la question 6 et pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ implique $\mathscr{P}(k+1)$ d'après la question 7.
Par récurrence (finie), on en déduit que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\forall x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k),\ P_k(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

En particulier, pour tout $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, $P_n(u)(x) = 0_{\mathbb{C}^n}$.
Comme $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n) = \mathbb{C}^n$ et $P_n = \chi_A$, on en déduit que $\chi_A(u) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{C}^n)}$.
Comme $\chi_A(A)$ est la matrice de $\chi_A(u)$ dans la base canonique, on en déduit que :

$$\boxed{\chi_A(A) = 0_n.}$$