DM6 - equation différentielles - complexe

2025-2026

Exercice 1 :

Soit l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$(E) : y''(x) + y(x) = 2 - x$$

1. a) Résoudre $(E_h) : y'' + y = 0$
   b) Cherchez une solution particulière (E) de la forme $y_p = ax + b$, où a et b sont réels que vous préciserez et en déduire l'ensemble des solutions de (E).
2. Soit maintenant une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable vérifiant :

$$(\mathcal{R}) : \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = x + 1$$

   a) Montrez que f est dérivable deux fois, avec, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 1 + f'(-x)$.
   b) En déduire que f est une solution de (E), et déterminez l'ensemble des fonctions f vérifiant $(\mathcal{R})$.

1. a) (E_0) a pour équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, donc deux racines complexes qui sont i et $-i$.
   On en déduit que $\boxed{(E_0) \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)}$
   b) On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax + b$. Ainsi $y_p' = a$ et on a $y_p'' = 0$.
   Cet y_p est solution de (E) si et seulement si $ax + b = 2 - x$.
   Il suffit de prendre $a = -1$ et $b = 2$, c'est à dire $\boxed{y_p = 2 - x.}$
   Ainsi
$$(E) \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + 2 - x$$
2. a) De $\mathcal{R}$, on déduit que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f(-x) + x + 1$.
   Par composition et somme de fonctions dérivables, f' est dérivable (donc f est dérivable deux fois) et
$$f''(x) = -(-f'(-x)) + 1 = f'(-x) + 1$$
   (notez le "$-$" qui provient de la composition)
   b) Comme $f'(x) = -f(-x) + x + 1$, on a $f'(-x) = -f(x) - x + 1$.
   De $f''(x) = f'(-x) + 1$, il vient donc $f''(x) = -f(x) - x + 1 + 1$, c'est à dire
$$f''(x) + f(x) = 2 - x$$
   Ainsi, f est une solution de (E).
   Donc il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + 2 - x$

ATTENTION : CE N'EST PAS FINI ! à cette étape, on n'a pas encore répondu au problème ! On sait que f est solution de (E), mais ça ne veut pas dire que toute les solutions de (E) vérifient la relation $\mathcal{R}$. Vous êtes très nombreux à vous êtes arrêtés....

Le problème est que pour obtenir l'équation (E), on a dérivé $\mathcal{R}$: le sens réciproque demanderait d'intégrer, ce qui ne donne pas forcément $\mathcal{R}$ à cause des constantes impliquées !

Bref, il revenir à $\mathcal{R}$: on veut $f'(x) + f(-x) = x + 1$.

On sait que f est de la forme des solutions de (E), donc on va remplacer :
On trouve $f'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x) - 1$ et $f(-x) = A\cos(x) - B\sin(x) + 2 + x$.
Et ainsi $f'(x) + f(-x) = \cos(x)(A + B) - \sin(x)(A + B) + 1 + x$ qui doit être égale à $1 + x$.
Soit au final : $(A + B)(\cos(x) + \sin(x)) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ainsi, en prenant en particulier $x = 0$, on doit avoir $A + B = 0$, donc nécessairement $A = -B$.

ET C'EST TOUJOURS PAS FINI!!!! : on a trouvé une condition pour que ça marche, mais ça veut pas dire que n'importe quels A et B tels que $A = -B$ fonctionne. $A = -B$ n'est qu'une condition nécessaire à cette étape.

De plus, si $A = -B$, la propriété est effectivement valable pour tout x (il suffit de le vérifier), et on a obtenu toutes les solutions :

$$\boxed{\exists A \in \mathbb{R}; f : x \mapsto A(\cos(x) - \sin(x)) + 2 - x}$$

ATTENTION : CE N'EST PAS.... euh, si, là c'est bon. Mais en réalité cette dernière étape est facultative, car tout peut s'écrire sous forme d'équivalence à partir de la première remarque "ATTENTION", en particulier en utilisant une unicité d'écriture des fonctions polynômiales en sin et cos dont on parlera plus tard dans l'année.

Exercice 2 :

On considère $C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$

1. On suppose qu'il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2m\pi$.
   Calculez C_n et S_n.
2. On suppose maintenant que x ne s'écrit pas sous forme $x = 2m\pi$.
   a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $Z_\theta = (1 - e^{i\theta})$.
   Montrez que $Z_\theta = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$
   b) Montrez que $C_n + iS_n$ est un quotient de deux nombres complexes de la forme de Z_θ pour deux expressions de θ que vous préciserez.
3. En déduire, toujours dans le cas où x ne s'écrit pas $2m\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, que $C_n + iS_n = \left(\cos\left(\frac{n}{2}x\right) + i\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\right) \times \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$
   et en déduire C_n et S_n.

---

1. Si $x = 2m\pi$, alors x est un multiple de 2π, et donc quel que soit $k \in \mathbb{N}$, on a $\cos(kx) = 1$ et $\sin(kx) = 0$. Ainsi, $C_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1$ et $S_n = 0$.
2. a) Avec la technique de l'angle moitié, il vient : $Z_\theta = (1 - e^{i\theta}) = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}) = e^{i\frac{\theta}{2}}(-2i\sin\frac{\theta}{2})$ via les formules d'Euler.

   b)
$$\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) + i\sum_{k=0}^{n} \sin(kx) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\cos(kx) + i\sin(kx)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k
\end{aligned}$$

   On reconnaît une série géométrique de raison e^{ix}, et $e^{ix} \neq 1$ car on a supposé x non multiple de 2π, d'où $C_n + iS_n = \dfrac{1 - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}}$.
   Finalement
$$\boxed{C_n + iS_n = \frac{Z_{(n+1)x}}{Z_x}}$$
3. On peut appliquer la formule obtenue en $2a$) avec $\theta = (n+1)x$ pour le numerateur, et $\theta = x$ pour le dénominateur)

$$\begin{aligned}
C_n + iS_n &= \frac{e^{i\frac{n+1}{2}x}(-2i\sin(\frac{n+1}{2}x))}{e^{i\frac{n}{2}x}(-2i\sin\frac{x}{2})} = e^{i\frac{n}{2}x}\frac{-2i\sin(\frac{n+1}{2}x)}{-2i\sin\frac{x}{2}} \\
&= (\cos(\frac{n}{2}x) + i\sin(\frac{n}{2}x)) \times \frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$

   Reste à comparer partie réelle et imaginaire et on a

$$\boxed{C_n = \cos(\frac{n}{2}x)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}} \text{ et } S_n = \sin(\frac{n}{2}x)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin\frac{x}{2}}}$$