DS n° 15.

Durée : 3 heures.

Vendredi 5 décembre.

Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Il y a deux DS : soient les exercices 1 à 5 et le théorème de Beatty, soit, plus difficile, les exercices 4 et 5, le théorème de Beatty, et le problème sur les filtres. Vous indiquerez sur votre copie le DS que vous choisissez.

Exercice 1 On veut déterminer un équivalent simple de la suite (v_n) définie par

$$v_n = \frac{\left(e^{1/n!} - 2^n\right)\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+1}\right)}{1 - \cos(1/n)} \sin^2(1/\sqrt{n}) \, .$$

1. Déterminez un équivalent de $1 - \cos(1/n)$.
2. Déterminez les limites de $(e^{1/n!})$ et (2^n). En déduire un équivalent de $e^{1/n!} - 2^n$.
3. Montrez que $\sqrt{n+1} \sim \sqrt{n}$. En déduire un équivalent de $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$.
4. Déterminez un équivalent simple de (v_n).

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $f(z) = \dfrac{2z-3}{z-1}$

1. Montrez que $g : \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{2\}$ est bijective, et déterminez f^{-1}.
2. On souhaite déterminer $f(A)$, où $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant 1\}$.
   (a) Montrez que $u \in f(A) \iff \left|\dfrac{u-3}{u-2}\right| \leqslant 1$.
   (b) Déterminez $f(A)$.
3. Déterminez $f^{-1}(B)$, où $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (e^x + 2)e^x$.

1. Montrez que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijective.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Résoudre l'équation $t^2 + 2t - y = 0$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}$.
3. Déterminez f^{-1}.

Exercice 4 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, $h : G \longrightarrow H$.

1. On suppose $g \circ f$ injective. Montrez que f est injective.
2. On suppose $g \circ f$ surjective. Montrez que g est surjective.
3. On suppose $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives. Montrez que f, g et h sont bijectives.

Exercice 5 (Bornes supérieures et inférieures) Les questions 1 et 2 de cet exercice sont indépendantes. Dans tout l'exercice, on considère deux sous-ensembles non vides A et B de $\mathbb{R}$.

1. On suppose dans cette question que : $\forall\, x \in A,\ \forall\, y \in B,\ x \leqslant y$.
   (a) Montrez que A admet une borne supérieure et B admet une borne inférieure.
   (b) Montrez que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
2. Dans cette question, on suppose que $A, B \subset \mathbb{R}_+$ et qu'ils sont majorés. On note
$$AB = \{xy \mid x \in A,\ y \in B\}.$$
   (a) Montrez que A, B et AB admettent une borne supérieure.
   (b) Montrez que $\sup(AB) \leqslant \sup(A)\sup(B)$.
   (c) On suppose dans cette question uniquement, que $\sup(A) = 0$ ou $\sup(B) = 0$. Que peut-on dire de AB ? Déterminez $\sup(AB)$.
   (d) On suppose dans cette question uniquement, que $\sup(A) > 0$ et $\sup(B) > 0$.
      i. Montrez qu'il existe $y \in B$ tel que $y > 0$.
      ii. Montrez que : $\forall\, x \in A,\ x \leqslant \frac{\sup(AB)}{y}$.
      iii. En déduire que $y \leqslant \frac{\sup(AB)}{\sup(A)}$.
      iv. Montrez que $\sup(A)\sup(B) \leqslant \sup(AB)$ et déterminez $\sup(AB)$.

Théorème de Beatty

- Soit X un ensemble, et $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Les sous-ensembles A et B forment une partion de X si $A \cup B = X$ et $A \cap B = \emptyset$.
- Soit $a \in]1, +\infty[$. On note $E_a = \{\lfloor na \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

On veut démonrer le théorème de Beatty : soient $a, b \in]1, +\infty[$. Alors E_a et E_b forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si et seulement si a, b sont irrationnels et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

On fixe deux réels $a, b \in]1, +\infty[$. Pour un entier $m \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$E_a(m) = E_a \cap [1, m] \quad \text{et} \quad f_a(m) = \operatorname{card}\big(E_a(m)\big)$$

(où card désigne le nombre d'éléments de l'ensemble).

1. **(Question préminimaire)**
   (a) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Montrez que $\lfloor x \rfloor \leqslant p \iff x < p + 1$.
   (b) Montrez que la fonction $n \longmapsto \lfloor na \rfloor$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.
2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrez que $f_a(m) = \operatorname{card}\big(\{n \in \mathbb{N}^* \mid \lfloor na \rfloor \leqslant m\}\big)$.
   (b) En déduire que $f_a(m) < \dfrac{m+1}{a}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \leqslant \frac{m+1}{a} - 1$. Montrez que $\lfloor na \rfloor \leqslant m$.
   (d) En déduire que : $\left\lfloor \dfrac{m+1}{a} \right\rfloor - 1 \leqslant f_a(m)$.
3. En déduire que la suite $\left(\dfrac{f_a(m)}{m}\right)_{m \in \mathbb{N}^*}$ converge et déterminez sa limite.
4. On suppose dans cette question que E_a et E_b forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   (a) Montrez que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $E_a(m)$ et $E_b(m)$ forment une partition de $[\![1, m]\!]$.
   (b) Montrez que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.
   (c) Montrez que $\frac{a}{b}$ est irrationnel, puis que a et b sont irrationnels.
5. On suppose dans cette question que a et b sont irrationnels, et que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.
   (a) Montrez que $E_a \cap E_b = \emptyset$.
   (b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Déterminez $f_a(m) + f_b(m)$. En déduire que $E_a \cup E_b = \mathbb{N}^*$.

Problème 1 : filtres sur un ensemble

Soit E un ensemble non vide. On désignera par $\overline{X}$ le complémentaire dans E d'une partie X de E. Un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ est un *filtre* sur E si

(P_0)	$\mathcal{F} \neq \emptyset$.	(P_1)	$\forall\,(X,Y) \in \mathcal{F}^2,\ X \cap Y \in \mathcal{F}$.
(P_2)	$\forall\, X \in \mathcal{F}, \forall\, Y \in \mathcal{P}(E) :\ X \subset Y \Rightarrow Y \in \mathcal{F}$.	(P_3)	$\emptyset \notin \mathcal{F}$

On note $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des filtres sur E.

Première partie

1. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ vérifiant (P_2) mais pas (P_3). Montrez que $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$.
2. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est-il un filtre sur E ?
3. (a) Dans cette question, et uniquement cette question, on suppose que $E = \{x\}$. Que peut-on dire de $\mathcal{P}(E)\backslash\{\emptyset\}$?
   (b) À quelle condition sur E l'ensemble $\mathcal{P}(E)\backslash\{\emptyset\}$ est-il un filtre sur E ?
4. Montrez que si $\mathcal{F}$ est un filtre sur E, alors E appartient à $\mathcal{F}$.
5. Pour toute partie non vide A de E, on note $\mathcal{F}_A = \{X \subset E, A \subset X\}$. Montrez que $\mathcal{F}_A$ est un filtre sur E. On l'appelle *filtre principal* engendré par A.
6. Montrez que l'application $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{P}(E)\backslash\{\emptyset\} & \longrightarrow & \mathcal{F}(E) \\ & A & \longmapsto & \mathcal{F}_A \end{array}$ est injective.

Deuxième partie

On munit l'ensemble $\mathcal{F}(E)$ de la relation d'ordre "inclusion". Autrement dit, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux fitres sur E, on pose

$$\mathcal{F} \leqslant \mathcal{G} \iff \mathcal{F} \subset \mathcal{G}.$$

On pourra utiliser indifféremment le symbole $\leqslant$ ou le symbole $\subset$.

Un filtre $\mathcal{F}$ de E est un *ultrafiltre* si : $\forall\, \mathcal{G} \in \mathcal{F}(E),\ \mathcal{F} \leqslant \mathcal{G} \Longrightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}$.

1. Soient A, B des parties non vides de E. Déterminez une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$.
2. (a) L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ possède-t-il un plus petit élément ? Si oui, lequel ?
   (b) L'ensemble $\mathcal{F}(E)$ possède-t-il un plus grand élément ? Si oui, lequel ?
3. Soit $\mathcal{F}_A$ le filtre engendré par une partie A non vide de E. Montrez que $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre si et seulement si A est un ensemble à un élément $\{x\}$. Les $\mathcal{F}_{\{x\}}$ sont les ultrafiltres *triviaux*.
4. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E, $A \in \mathcal{P}(E)$ non vide tel que $A \notin \mathcal{F}$, et $\mathcal{H}_A = \{X \in \mathcal{P}(E) \,|\, A \cup X \in \mathcal{F}\}$. Montrez que $\mathcal{H}_A$ est un filtre sur E qui contient $\overline{A}$.
5. Montrez que le filtre $\mathcal{F}$ sur E est un ultrafiltre si et seulement si
$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ (A \in \mathcal{F} \text{ ou } \overline{A} \in \mathcal{F}).$$
6. Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. Montrez que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre si et seulement si
$$\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2, A \cup B \in \mathcal{F} \Longrightarrow (A \in \mathcal{F} \text{ ou } B \in \mathcal{F}).$$