Corrigé du DS n° 15.

Exercice 1 1. Comme $1/n!$ tend vers 0 en $+\infty$, on a $\boxed{1-\cos(1/n) \sim \dfrac{1}{2n^2}}$.

2. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{1/n!} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{1/n!}}{2^n} = 0$, donc que $e^{1/n!} = o(2^n)$, donc $\boxed{e^{1/n!} - 2^n \sim -2^n}$.

3. On a pour $n > 0$ $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 1$ par continuité de la racine carrée. On en déduit que

$$\boxed{\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \sim 2\sqrt{n}},$$

car $\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} = 1$.

4. Comme $\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, donc par produit d'équivalents, on a $\boxed{v_n \sim \dfrac{-2^n \times 2\sqrt{n}}{1/(2n^2)} \times \dfrac{1}{n} = -2^{n+2} n\sqrt{n}}$.

Exercice 2 1. Nous devons résoudre l'équation $f(z) = u$ d'inconnue $z \neq 1$, pour $u \in \mathbb{C}$. On a

$$f(z) = u \iff z(u-2) = u-3$$

car $z - 1 \neq 0$.

— Si $u = 2$, l'équation n'a aucune solution, donc $2 \notin \mathrm{Im}(f)$.

— Sinon, $f(z) = u \iff z = \dfrac{u-3}{u-2}$, et $\dfrac{u-3}{u-2} \neq 1$, donc u admet exactement un antécédent par f.

On a donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}\backslash\{2\}$ et f est injective (unicité de l'antécédent), donc f est bijective, et $\boxed{f^{-1}(u) = \dfrac{u-3}{u-2}}$.

2. (a) On a $u \in f(A) \iff \exists z \in A,\ u = f(z) \overset{f \text{ bij.}}{\iff} f^{-1}(u) \in A \iff \frac{u-3}{u-2} \in A$.

(b) Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{2\}$. On cherche une cns sur u pour que son unique antécédent par f soit dans A. Cela nous donnera $f(A)$. On a

$$\left|\frac{u-3}{u-2}\right| \leqslant 1 \iff |u-3|^2 \leqslant |u-2|^2 \iff (u-3)(\overline{u}-3) \leqslant (u-2)(\overline{u}-2) \iff \frac{5}{2} \leqslant \mathrm{Re}(u),$$

donc $\boxed{f(A) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \leqslant \dfrac{5}{2}\right\}}$.

3. On cherche les $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ tels que $f(z) \in B$; *i.e.* tels que $|f(z) - 1| = 1$. Or,

$$|f(z) - 1| = 1 \iff |z-2| = |z-1|,$$

ce qui correspond aux points sur la médiatrice su segment $[1, 2]$, donc $\boxed{f^{-1}(B) = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \dfrac{3}{2}\right\}}$.

Exercice 3 1. On peut raisonner par le théorème de la bijection : f est strictement croissante et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$), donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+^*$.

2. Le discriminant est $4(1+y)$, donc si $y < -1$, il n'y a pas de solution réelle, et sinon, les solutions sont $\boxed{-1 \pm \sqrt{y+1}}$.
3. Soit $y \in \mathbb{R}_+^*$. Par définition, $x = f^{-1}(y)$ est l'unique solution de l'équation $y = f(x)$. Or,
$$y = f(x) \iff e^{2x} + 2e^x - y = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} t = e^x \\ t^2 + 2t - y = 0 \end{array} \right. .$$
D'après 2, les solutions de l'équation du second degré sont $-1 \pm \sqrt{y+1}$. Or, $-1 - \sqrt{y+1} \leqslant 0$, donc ne peut valoir e^x, et donc $e^x = \sqrt{y+1} - 1$ et donc $\boxed{f^{-1}(y) = \ln(\sqrt{y+1} - 1)}$.

Exercice 4 1. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$. Mais $g \circ f$ est injective, donc $x = x'$, et f est injective.
2. Soit $y \in G$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$, et $y = g(f(x))$, donc g est surjective.
3. Comme $g \circ f$ est surjective, g l'est également. Mais $h \circ g$ est injective, donc g également, donc g est bijective. Mais alors
$$f = g^{-1} \circ (g \circ f), \qquad h = (h \circ g) \circ g^1,$$
donc f et h sont bijectives par composée de fonctions bijectives.

Exercice 5 1. (a) Comme A et B sont non vides, il suffit de montrer que A est majoré et que B est minoré. Or, si $x \in A$, on a : $\forall\, y \in B,\ x \leqslant y$, donc B est minoré. De même, si $y \in B$, on a $\forall\, x \in A,\ x \leqslant y$, donc A est majoré.
(b) On vient de voir que si $x \in A$, on a : $\forall\, y \in B,\ x \leqslant y$, donc x minore B, donc $x \leqslant \inf(B)$, et donc : $\forall\, x \in A,\ x \leqslant \inf(B)$. Donc $\inf(B)$ majore A, donc $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
2. (a) A et B sont des sous-ensembles non vides et majorés de $\mathbb{R}$, donc ils admettent une borne supérieure. De plus, si $x \in A$ et $y \in B$, on a
$$0 \leqslant x \leqslant \sup(A) \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant B,$$
donc par produit d'inégalités positives, on a $xy \leqslant \sup(A)\sup(B)$, donc $\sup(A)\sup(B)$ majore AB, qui est non vide, donc admet une borne supérieure.
(b) On vient de montrer que $\sup(A)\sup(B)$ majore AB, donc $\sup(AB) \leqslant \sup(A)\sup(B)$.
(c) Supposons par exemple $\sup(A) = 0$. Comme $A \subset (\mathbb{R}_+)$ et $A \neq \emptyset$, on a $\boxed{A = \{0\}}$, et donc également $\boxed{AB = \{0\}}$, donc $\boxed{\sup(AB) = 0}$.
(d) i. Comme $B \subset \mathbb{R}_+$, et que $\sup(B) > 0$, 0 ne majore pas B, donc il existe $y \in B$ avec $y > 0$.
ii. Comme $xy \in AB$, on a $xy \leqslant \sup(AB)$, et comme $y > 0$, on peut diviser par y.
iii. On en déduit que $\frac{\sup(AB)}{y}$ majore A, donc que $\sup(A) \leqslant \frac{\sup(AB)}{y}$. Comme $y > 0$ et $\sup(A) > 0$, on obtient l'inégalité demandée.
iv. On déduit de l'inégalité précédente que tout $y > 0$ de B est majoré par $\frac{\sup(AB)}{\sup(A)}$, qui majore également 0, donc $\frac{\sup(AB)}{\sup(A)}$ majore B, donc $\sup(B) \leqslant \frac{\sup(AB)}{\sup(A)}$. Comme $\sup(A) > 0$, on obtient l'inégalité demandée. On en déduit que $\boxed{\sup(AB) = \sup(A)\sup(B)}$.

Théorème de Beatty

1. (a) — Supposons $\lfloor x \rfloor \leqslant p$. Alors $x < \lfloor x \rfloor + 1 \leqslant p + 1$ donc $x < p + 1$.
— Réciproquement, si $p + 1 > x$, comme $\lfloor x \rfloor$ est le plus petit entier strictement plus grand que x, on a $p + 1 \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$, donc $\lfloor x \rfloor \leqslant p$.

(b) Soient $n, n' \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < n'$. Montrons que $\lfloor na \rfloor < \lfloor n'a \rfloor$. Or, $n+1 \leqslant n'$ (n et n' sont des entiers), donc $(n+1)a \leqslant n'a$ ($a > 0$). Or, $a > 1$, donc $na + 1 < (n+1)a$, donc $na + 1 \leqslant n'a$, donc par croissance de la partie entière, $\lfloor na \rfloor + 1 = \lfloor na + 1 \rfloor \leqslant \lfloor n'a \rfloor$, et on a bien $\lfloor na \rfloor < \lfloor n'a \rfloor$.

2. (a) On a $E_a(m) = \{\lfloor na \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leqslant \lfloor na \rfloor \leqslant m\}$. Or, $a > 1$, donc si $n \geqslant 1$, on a $1 < na$ donc $1 \leqslant \lfloor na \rfloor$ et $E_a(m) = \{\lfloor na \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*,\ \lfloor na \rfloor \leqslant m\}$.

   Or, la fonction $n \longmapsto \lfloor na \rfloor$ est injective (car strictement croissante), donc $\{\lfloor na \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*,\ \lfloor na \rfloor \leqslant m\}$ et $\{n \in \mathbb{N}^*,\ \lfloor na \rfloor \leqslant m\}$ sont en bijection, donc ont même nombre d'éléments.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lfloor na \rfloor \leqslant m$. Par 1(a), $na < m+1$, donc $n < \dfrac{m+1}{a}$. Par 2(a), on a donc $f_a(m) < \dfrac{m+1}{a}$.

   (c) On a donc $na \leqslant m + 1 - a$, donc $na + a \leqslant m + 1$, donc $na < m + 1$ (car $a > 0$), donc $\lfloor na \rfloor \leqslant m$ par 1(a).

   (d) Par 1(c), si $n \leqslant \frac{m+1}{a} - 1$, alors $\lfloor na \rfloor \in E_a(m)$, qui contient donc au moins autant d'éléments que les entiers de 1 jusqu'à $\frac{m+1}{a} - 1$ (par 2(a)), qui sont au nombre de $\left\lfloor \frac{m+1}{a} \right\rfloor - 1$.

3. En divisant l'inégalité ci-dessus par $m > 0$, avec le théorème d'encadrement, on obtient $\boxed{\dfrac{f_a(m)}{m} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{a}}$.

4. (a) Comme $E_a(m) \cap E_b(m) \subset E_a \cap E_b = \emptyset$, on a $E_a(m) \cap E_b(m) = \emptyset$. Puis

$$[\![1, m]\!] = [\![1, m]\!] \cap \mathbb{N}^* = [\![1, m]\!] \cap \big(E_a \cup E_b\big) = E_a(m) \cup E_b(m).$$

   (b) Par 1(a), on a l'égalité des cardinaux $\boxed{f_a(m) + f_a(m) = m}$, et donc, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{f_a(m)}{m} + \dfrac{f_b(m)}{m} = 1$. En passant à la limite quand $m \longrightarrow +\infty$, on obtient l'égalité demandée.

   (c) Supposons $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors deux entiers p, q tels que $pa = qb$, donc $\lfloor pa \rfloor = \lfloor qb \rfloor \in E_a \cap E_b = \emptyset$: contradiction.

   On a alors $b = 1 + \frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$, et de même pour a.

5. (a) On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe $n, m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lfloor na \rfloor = \lfloor mb \rfloor$. Notons p cet entier. On a donc, comme $a, b \notin \mathbb{Q}$, $p < na < p + 1$ et $p < mb < p + 1$, et en divisant par a ou b (> 0), on obtient

$$\frac{p}{a} < n < \frac{p+1}{a}, \qquad \frac{p}{b} < m < \frac{p+1}{b}.$$

   On ajoute alors ces inégalités pour obtenir (car $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$)

$$p = \frac{p}{a} + \frac{p}{b} < n + m < \frac{p+1}{a} + \frac{p+1}{b} = p + 1,$$

   ce qui est une contradiction car $n + m$ est un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs.

   (b) En additionnant les inégaliés de la question 2, on obtient que (a et b sont irrationnels, donc les inégalités de gauche sont strictes)

$$m - 1 = \frac{m+1}{a} + \frac{m+1}{b} - 2 < f_a(m) + f_b(m) < \frac{m+1}{a} + \frac{m+1}{b} = m + 1,$$

   donc $\boxed{f_a(m) + f_b(m) = m}$.

   On a donc $\operatorname{card}\big(E_a(m)\big) = \operatorname{card}\big(E_b(m)\big)$. Puisque $E_a \cap E_b = \emptyset$, on a aussi $E_a(m) \cap E_b(m) = \emptyset$, donc $E_a(m) \cup E_b(m) = [\![1, m]\!]$. Ceci étant vrai pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $E_a \cup E_b = \mathbb{N}^*$.

Filtres et ultrafiltres

Première partie

1. Si $\emptyset \in \mathcal{F}$, alors par (P_2), tout $X \subset E$ est élément de $\mathcal{F}$ et donc $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$.

2. Non, car $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.
3. (a) Dans ce cas, $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\} = \{E\}$, qui est bien un filtre.
   (b) Tout d'abord on doit avoir $E \neq \emptyset$. De plus, la stabilité par intersection (propriété (P_1)) implique que E n'ait qu'un seul élément. En effet, si E admet au moins deux éléments distincts x et y, alors $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ ne peut pas être dans le filtre.
4. Comme $\mathcal{F} \neq \emptyset$, il existe $A \in \mathcal{F}$. Comme $A \subset E$, par (P_2), $E \in \mathcal{F}$.
5. L'ensemble $\mathcal{F}_A$ est non vide puisqu'il contient A. De plus, si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{F}_A$, alors ils contiennent tous deux A, donc $X \cap Y$ contient A, donc $X \cap Y \in \mathcal{F}_A$, ce qui prouve (P_1).

   Puis si $X \in \mathcal{F}$, et $X \subset Y$, alors $A \subset X$ donc $A \subset Y$ et $Y \in \mathcal{F}$, d'où (P_2). Enfin, la dernière provient du fait que $A \neq \emptyset$, donc $A \not\subset \emptyset$.
6. Soient A et B deux sous-ensembles de E on vides tels que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Alors $A \in \mathcal{F}_B$, donc $B \subset A$. De même, $A \subset B$, ce qui prouve que $A = B$, donc φ est injective.

Deuxième partie

1. Montrons que $\boxed{\mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A \iff A \subset B}$.

   Supposons $A \subset B$, et soit $X \in \mathcal{F}_B$. Alors $B \subset X$, donc $A \subset X$ et $X \in \mathcal{F}_A$, ce qui prouve que $\mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$. Réciproquement, si $\mathcal{F}_B \subset \mathcal{F}_A$, alors, comme $B \in \mathcal{F}_B$, on a $A \subset B$.
2. (a) Oui, c'est $\mathcal{F}_E = \{E\}$. En effet, pour tout filtre $\mathcal{F}$, on a $E \in \mathcal{F}$ (question 4 de la première partie), donc $\mathcal{F}_E \subset \mathcal{F}$.
   (b) Non si E admet au moins deux éléments. Dans le cas contraire, il existerait un filtre $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ pour tout filtre $\mathcal{F}$. Soient alors x et y deux éléments distincts de E. On a donc $\mathcal{F}_{\{x\}} \subset \mathcal{M}$ et $\mathcal{F}_{\{y\}} \subset \mathcal{M}$, donc $\{x\} \in \mathcal{M}$ et $\{y\} \in \mathcal{M}$, donc $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ serait dans $\mathcal{M}$, ce qui est absurde.
3. Soit$x \in E$. Montrons que $\mathcal{F}_{\{x\}}$ est un ultrafiltre. Supposons $\mathcal{F}_{\{x\}} \subset \mathcal{G}$ (on a donc $\{x\} \in \mathcal{G}$), et montrons que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_{\{x\}}$. Soit $A \in \mathcal{G}$. Alors $A \cap \{x\} \in \mathcal{G}$, donc cette intersection est non vide, *i.e.* $x \in A$, soit $A \in \mathcal{F}_{\{x\}}$.

   Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}_A$ soit un ultrafiltre pour un certain ensemble A non vide. Supposons que A admette au moins deux éléments distincts. Il existe donc $B \subset A$ avec $B \neq \emptyset$ et $B \neq A$. Alors $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}_B$ sans égalité, ce qui est absurde car $\mathcal{F}_A$ est un ultrafiltre.
4. — Tout d'abord, $\mathcal{H}_A$ contient $\overline{A}$ car $A \cup \overline{A} = E \in \mathcal{F}$, et donc $\mathcal{H}_A$ est non vide.
   — Comme $A \notin \mathcal{F}$, on a $\emptyset \notin \mathcal{H}_A$.
   — De plus, si $X \in \mathcal{H}_A$ et $X \subset Y$, alors $A \cup Y$ contient $A \cup X$ qui est élément de $\mathcal{F}$. On en déduit $A \cup Y \in \mathcal{F}$ car $\mathcal{F}$ est un filtre, donc $Y \in \mathcal{H}_A$.
   — Il reste à prouver la propriété (P_1). Or, si X et Y sont des éléments de $\mathcal{H}_A$, alors $A \cup (X \cap Y) = (A \cup X) \cap (A \cup Y)$. Le membre de droite de cette égalité est dans $\mathcal{F}$ par (P_1) appliquée à $\mathcal{F}$, donc $X \cap Y \in \mathcal{H}_A$.

   L'ensemble $\mathcal{H}_A$ est donc un filtre sur E.
5. Remarquons que $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}_A$. En effet, si $X \in \mathcal{F}$, alors $X \subset A \cup X$ donc $A \cup X \in \mathcal{F}$ par (P_2), donc $X \in \mathcal{H}_A$.
   — Supposons que $\mathcal{F}$ soit un ultrafiltre, et soit A un sous-ensemble de E tel que $A \notin \mathcal{F}$. Montrons que $\overline{A} \in \mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}_A$, on a $\mathcal{F} = \mathcal{H}_A$. Or, $\overline{A} \in \mathcal{H}_A$, donc $\overline{A} \in \mathcal{F}$.
   — Réciproquement, supposons que pour tout sous-ensemble A de E, on ait $A \in \mathcal{F}$ ou $\overline{A} \in \mathcal{F}$. Montrons que $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.
   Soit $\mathcal{G}$ un filtre tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{G}$ tel que $A \notin \mathcal{F}$. Alors $\overline{A} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Donc $A, \overline{A} \in \mathcal{G}$, et par (P_1), $\emptyset = A \cap \overline{A} \in \mathcal{G}$, ce qui est absurde. Donc $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est bien un ultrafiltre.
6. — Supposons que l'on ait l'implication de l'énoncé. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Si $A \notin \mathcal{F}$ et $B = \overline{A}$, on a $A \cup B = E \in \mathcal{F}$, donc $B = \overline{A} \in \mathcal{F}$. D'après la question précédente, $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre.
   — Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ soit un ultrafiltre, et soient A et B tels que $A \notin \mathcal{F}$ et $A \cup B \in \mathcal{F}$. Montrons que $B \in \mathcal{F}$. On a $\overline{A} \in \mathcal{F}$ d'après la question précédente, donc $(A \cup B) \cap \overline{A} \in \mathcal{F}$. Or, $(A \cup B) \cap \overline{A} = B \cap \overline{A} \subset B$. Par (P_2), on a $B \in \mathcal{F}$.