MP2I du lycée Victor Hugo de Besançon,
Année scolaire 2025/2026.

DL n° 3 facultatif.

Jeudi 11 décembre.

À rendre le vendredi 19.

Exercice 1 (Valeurs d'adhérences) Soit $(u_n)_n$ une suite. Le réel x est une valeur d'adhérence de $(u_n)_n$ lorsqu'il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge vers x.

On note A l'ensemble des valeurs d'ahérence de la suite $(u_n)_n$.

Les propositions suivantes sont-elles toujours vérifiées ? Justifiez votre réponse.

1. u_n appartient à A à partir d'un certain rang.
2. Si A est non vide, Alors $(u_n)_n$ est bornée.
3. Tout segment $[a, b]$ disjoint avec A ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite $(u_n)_n$.
4. Tout intervalle ouvert $]a, b[$ disjoint avec A ne contient qu'un nombre fini de termes de la suite.
5. Si A est borné, alors $(u_n)_n$ est bornée.
6. Si $A = \emptyset$, alors $(u_n)_n$ est bornée.
7. Si $(v_n)_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$ et que B désigne l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(v_n)_n$, alors B est inclus dans A.
8. Si A est un singleton, alors $(u_n)_n$ converge.
9. Si A est un singleton et que $(v_n)_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$, alors A est aussi l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(v_n)_n$.

La série des inverses des nombres premiers diverge

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note p_k le k-ième nombre premier, par exemple $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$,...
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k},$$

c'est-à-dire la somme des inverses des n premiers nombres premiers.

1. Montrez que si la suite (S_n) diverge, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.
2. Pour montrer que (S_n) diverge, on raisonne par l'absurde. Dans la suite du problème, on supposera que la suite (S_n) converge vers une limite finie ℓ.

   Pour tout $k_0 > 0$, on note $\left(S_n^{k_0}\right)_{n > k_0}$ la suite définie par

   $$\forall n > k_0, \quad S_n^{k_0} = \sum_{k=k_0+1}^{n} \frac{1}{p_k}.$$

   (a) Montrez que la suite $(S_n^{k_0})$ converge. On notera ℓ_{k_0} sa limite.
   (b) Montrer qu'il existe $K_0 \geqslant 1$ tel que $\ell_{K_0} \leqslant \frac{1}{2}$.
3. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E = \{1, \ldots, N\}$.
   - On note A le sous-ensemble de E formé des entiers dont la décomposition en facteurs premiers comporte au moins un des p_k avec $k > K_0$.
   - On note B le complémentaire de A dans B, c'est-à-dire le sous-ensemble de E formé de 1 et des entiers dont la décomposition en facteurs premiers ne contient que les nombres premiers p_1, p_2,..., p_{K_0}.

   (a) Soit n un élément de B différent de 1. Montrez que n peut s'écrire $n = m^2 q$ où m est un entier tel que $m \leqslant \sqrt{n}$ et $q = \prod\limits_{k=1}^{K_0} p_k^{\alpha_k}$, avec $\alpha_k \in \{0, 1\}$.
   (b) En déduire que $\mathrm{card}(B) \leqslant \sqrt{N} 2^{K_0} + 1$.
4. Majorons maintenant le cardinal de A pour minorer celui de B.

   (a) Pour tout $k > K_0$, on note A_k le sous-ensemble de A formé des entiers divisibles par p_k. Donner une expression du cardinal de A_k en fonction de N et p_k. En déduire que $\mathrm{card} A_k \leqslant \dfrac{N}{p_k}$.
   (b) On admet que si A est un ensemble fini, alors $\mathrm{card}(A) \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=K_0+1}^{n} \mathrm{card}(A_k)$, cette dernière limite étant éventuellement égale à $+\infty$.

   Montrez que cette limite est en fait finie et que $\mathrm{card}(A) \leqslant N \ell_{K_0} \leqslant \dfrac{N}{2}$.

   (c) En déduire que $\dfrac{N}{2} \leqslant \mathrm{card}(B) \leqslant \sqrt{N} 2^{K_0} + 1$.
5. En déduire un contradiction.

Le fait que la suite S diverge vers $+\infty$ est une autre preuve du fait qu'il y a une infinité de nombres premiers...