Exercices

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1} n^{-n}z^n; \quad \sum_{n\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n \text{ et } \sum \cos(n\theta)z^n.$$

Exercice 2. Calculer, après avoir justifié leur existence, les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}, \quad \text{et} \quad \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(n+1)(n-2)}{2^n n!}.$$

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle

$$\sum \frac{\sin(n\theta)}{n!}x^n.$$

Exercice 4. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes :

1. $\sum a_n z^n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}, a_n$ est le reste dans la division euclidienne de n par 3.
2. $\sum b_n z^n$ où pour tout $n\in\mathbb{N}, b_n$ est le quotient dans la division euclidienne de n par 3.

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes, montrer qu'elle est développable en série entière, préciser son développement ainsi que le rayon de convergence :

$$f : x\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}; \quad g : x\mapsto \ln(\sqrt{1-x^2}) \text{ et } h : x\mapsto e^x\sin(x)$$

Exercice 6. Montrer que la fonction

$$f : x\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{sinon}\end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$.

Exercice 7. Déterminer le produit de Cauchy des séries entières :

$$\sum x^n \text{ et } \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}.$$

Préciser le rayon de convergence de chacune des trois séries entières.

Exercice 8.

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières :

$$\sum \frac{z^{2n}}{2^n} \text{ et } \sum n^{(-1)^n}x^n.$$

2. Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b et de sommes S_a et S_b.
   Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série $\sum c_n z^n$ avec $\forall k\in\mathbb{N}, c_{2k}=a_k$ et $c_{2k+1}=b_k$.

Exercice 9. Nombres de Catalan.
On appelle mot de Dyck ou d'expression bien parenthésée un mot :

- composé de "(" et ")" ;
- avec autant de "(" que de ")" ;
- aucun préfixe ne contient strictement plus de ")" que de "(".

Par exemple "((()()))" est un mot de Dyck, mais "())(" n'en est pas un.
Pour tout entier $n\geqslant 1$, on note C_n le nombre de mots de Dyck de longueur $2n$ et $C_0=1$.

1. Déterminer C_1, C_2 et C_3 en énumérant les mots de Dyck de longueur $2, 4$ et 6.
2. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, C_n\leqslant 2^{2n}$. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de la série entière $\sum C_k x^k$?
3. Montrer que, pour tout $n\geqslant 1$:

$$C_n=\sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-1-k}.$$

   Indication : On peut remarquer qu'un mot de Dyck est de la forme : "(m)m' " avec "m" et "m' " des mots de Dyck éventuellement vides.

4. On note S la somme de la série entière $\sum C_n z^n$.
   Montrer que : $\forall x\in\left]-\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right[, S(x)=1+xS(x)^2$.
5. En déduire une expression de $S(x)$ en fonction de $x\in\left]\frac{1}{4}\,;\frac{1}{4}\right[$.
6. Développer en série entière la fonction $f : u\mapsto\sqrt{1-u}$.
7. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$C_n=\frac{(2n)!}{(n+1)!n!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 10.

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme S.
   Montrer que (formule de Cauchy) :
$$\forall r \in]0\,;R[, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} S(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$
2. Montrer que si f est une fonction développable en série entière de rayon infini et bornée, alors elle est constante (théorème de Liouville).
3. Montrer que : $\forall r \in]0\,;R[, |S(0)| \leqslant \max\limits_{|z|=r} |S(z)|$.

Exercices CCINP

Exercice 11 (CCINP 2). On pose $f(x) = \dfrac{3x+7}{(x+1)^2}$.

1. Décomposer $f(x)$ en éléments simples.
2. En déduire que f est développable en série entière sur un intervalle du type $]-r, r[$ (où $r > 0$).
   Préciser ce développement en série entière et déterminer, en le justifiant, le domaine de validité D de ce développement en série entière.
3. (a) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$.
   On pose, pour tout $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Exprimer, pour tout entier p, en le prouvant, a_p en fonction de $g^{(p)}(0)$.
   (b) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 12 (CCINP 18). On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.
   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.
2. (a) La fonction S est-elle continue sur D ?
   (b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.
   (c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur $[0, 1]$.

Exercice 13 (CCINP 24).

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n)!}$.
2. Rappeler, sans démonstration, le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$ et préciser le rayon de convergence.
3. (a) Déterminer $S(x)$.
   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(0) = 1, \quad f(x) = \mathrm{ch}\sqrt{x} \text{ si } x > 0, \quad f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 .$$
   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 (CCINP 51).

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$ converge.

   On se propose de calculer la somme de cette série.
2. Donner le développement en série entière en 0 de $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ en précisant le rayon de convergence.
   Remarque : dans l'expression du développement, on utilisera la notation factorielle.
3. En déduire le développement en série entière en 0 de $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\, x$ ainsi que son rayon de convergence.
4. En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2 2^{4n}(2n+1)}$.