INTÉGRATION

Cours

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Vous avez défini en première année l'intégrale d'une fonction **continue** sur un **segment** :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ où } f \text{ est une fonction continue sur } [a,b] \text{ avec } a \text{ et } b \text{ deux réels tels que } a<b.$$

Dans ce chapitre, nous allons étendre la notion d'intégrale à d'autres situations.

I. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

A. Fonctions continues par morceaux sur un segment

Rappel : Soit a et b deux réels avec $a<b$. Soit f une fonction définie et continue sur $]a,b[$.
On dit que la fonction f est *prolongeable par continuité sur* $[a,b]$ lorsque f admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b finies.
On appelle alors *prolongement par continuité de f sur* $[a,b]$ la fonction $\tilde{f}$ définie sur $[a,b]$ par :

$$\forall x \in]a,b[,\ \tilde{f}(x)=f(x)\ \ ,\ \ \tilde{f}(a)=\lim_{x\to a^+} f(x)\ \ ,\ \ \tilde{f}(b)=\lim_{x\to b^-} f(x).$$

La fonction $\tilde{f}$ est une fonction continue sur $[a,b]$.

Définition 1

Soit a et b deux réels avec $a<b$.

- On appelle *subdivision de* $[a,b]$ toute suite finie de réels $(c_0,c_1,\dots,c_n)$ telle que :

$$a=c_0<c_1<\cdots<c_n=b.$$

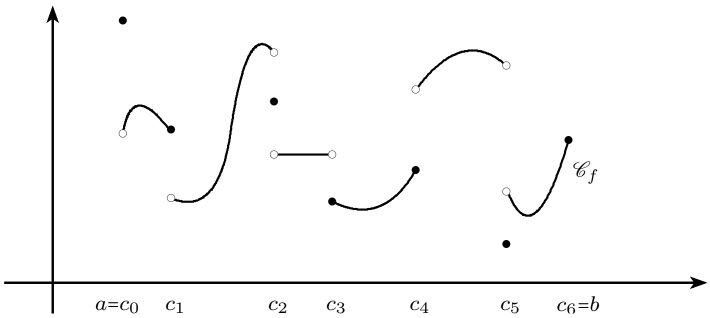
- Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

  La fonction f est dite *continue par morceaux sur* $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $(c_0,c_1,\dots,c_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $j\in [\![1,n]\!]$, la restriction de f à $]c_{j-1},c_j[$ est une fonction continue sur $]c_{j-1},c_j[$, prolongeable par continuité sur $[c_{j-1},c_j]$.

  Une telle subdivision est dite *adaptée à f*.

En d'autres termes, une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est une fonction continue sauf en un nombre fini de points de $[a,b]$, qui admet une limite à gauche et une limite à droite finies en chacun de ces points (seulement à droite pour a et à gauche pour b).

Notons qu'il n'y a pas unicité de la subdivision.



Exemple 1 : Soit f la fonction définie par $f(0) = f(1) = -1$ et pour tout $x \in]0,1[\cup]1,2]$, $f(x) = \dfrac{x\ln x}{x-1}$. Montrer que f est continue par morceaux sur $[0,2]$.

Proposition 2

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté $\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K})$.

- Le produit de deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.
- Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.
- $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{C})$ si et seulement si $\mathrm{Re}(f) \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et $\mathrm{Im}(f) \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$.

B. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

1. Définition

Définition/Proposition 3

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K})$.

- Le scalaire $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\int_{c_{j-1}}^{c_j}\tilde{f}_{/]c_{j-1},c_j[}(t)\,\mathrm{d}t$, où $(c_0,\dots,c_n)$ est une subdivision adaptée à f et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\tilde{f}_{/]c_{j-1},c_j[}$ est le prolongement par continuité de $f_{/]c_{j-1},c_j[}$ sur $[c_{j-1},c_j]$, est indépendant de celle-ci.
- On appelle *intégrale de f sur $[a,b]$* et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ le scalaire :

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{c_{j-1}}^{c_j}\tilde{f}_{/]c_{j-1},c_j[}(t)\,\mathrm{d}t,\ \text{ où } (c_0,\dots,c_n) \text{ est une subdivision adaptée à } f.$$

Notons que si l'on change la définition de la fonction f en un nombre fini de points de $[a,b]$ alors la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est inchangée.

Exemple 2 : Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ t\ln t & \text{si } t \in]0,1] \\ t & \text{si } t \in]1,2]. \end{cases}$

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie.

Pour $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K})$, on pose également : $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Propriétés

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment s'étendent aux fonctions continues par morceaux sur un segment (il suffit d'utiliser des subdivisions adaptées) sauf le cas de nullité de l'intégrale et ses corollaires.

Soit a et b deux réels. On note I le segment de bornes a et b.
On suppose que f et g sont deux fonctions **continues par morceaux** sur le **segment** I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Nom de la propriété	Énoncé
Relation de Chasles	$\forall c \in I,\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$
Linéarité	$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\quad \displaystyle\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
Positivité $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	$\left[\begin{array}{c} a \leqslant b \\ \forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant 0 \\ \text{(sauf éventuellement en un nombre fini de points)} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0\right]$
Croissance $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	$\left[\begin{array}{c} a \leqslant b \\ \forall t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t) \\ \text{(sauf éventuellement en un nombre fini de points)} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right]$
Inégalité triangulaire	$\left\lvert \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\rvert \leqslant \displaystyle\int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} \lvert f(t)\rvert\,\mathrm{d}t$

Notons que la relation de Chasles reste vraie quelque soit l'ordre de a, b et c tant que la fonction f est continue par morceaux sur le plus grand segment.

On suppose désormais que f et g sont **continues** sur le **segment** I.

Nom de la propriété	Énoncé
Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction continue et de signe constant	$\left[\begin{array}{c} f \text{ est continue sur } I \\ a \neq b \\ f \text{ est de signe constant sur } I \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{array}\right] \Rightarrow f \text{ est nulle sur } I$
Stricte positivité	$\left[\begin{array}{c} f \text{ est continue sur } I \\ a < b \\ \forall t \in [a,b],\ f(t) \geqslant 0 \\ \exists t_0 \in [a,b] \text{ tel que } f(t_0) > 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0\right]$
Stricte croissance	$\left[\begin{array}{c} f \text{ et } g \text{ sont continues sur } I \\ a < b \\ \forall t \in [a,b],\ f(t) \leqslant g(t) \\ \exists t_0 \in [a,b] \text{ tel que } f(t_0) < g(t_0) \end{array}\right] \Rightarrow \left[\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\right]$

Il faut penser à mentionner la continuité des fonctions lorsque vous utilisez l'un de ces trois résultats.

On peut donner une généralisation de la *formule de la moyenne*.
On suppose f continue par morceaux et g continue sur le segment I à valeurs réelles, avec f de signe constant sur I.
Alors il existe $c \in I$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(c)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour finir, on rappelle le changement de variable et l'intégration par parties.
Pour simplifier l'écriture des deux résultats suivants, on suppose $a < b$.

Théorème 4 (*Changement de variable*)

Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$.
Soit f une fonction continue sur le segment $\varphi([a,b])$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On a :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 5 (*Intégration par parties*)

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a,b]$.
On a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

II. Intégrales généralisées

Nous allons définir la notion d'intégrale pour une fonction continue par morceaux sur un intervalle I qui n'est pas un segment. Notons qu'il existe 9 types d'intervalles :

$$[a,b],\ [a,b[,\ ]a,b],\ ]a,b[,\ [a,+\infty[,\ ]a,+\infty[,\ ]-\infty,b],\ ]-\infty,b[\text{ et }]-\infty,+\infty[\quad \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2,\ a \leqslant b.$$

A. Fonctions continues par morceaux sur un intervalle

Définition 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
La fonction f est dite *continue par morceaux sur* I lorsque sa restriction à tout segment $[a,b]$ inclus dans I est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Exemple : La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Proposition 7

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté $\mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$.

Théorème 8 (*Théorème fondamental de l'intégration*)

Soit $f \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$. Soit $a \in I$.

- La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction continue sur I et dérivable en tous les points x de continuité de f, on a en ces points $F'(x) = f(x)$.
- En particulier, si f est continue sur I alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et on a pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.
  La fonction F est donc l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

B. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle

1. Sur un intervalle du type $[a, b[$ ou $]a, b]$

Définition 9

On considère l'intervalle $[a, b[$ où a et b vérifient $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b[, \mathbb{K})$.

- On dit que *l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *est convergente* lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en b.
  Sinon, on dit qu'elle *est divergente*.
- En cas de convergence, on appelle *valeur de l'intégrale généralisée* et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite c'est-à-dire :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

- On parle d'intégrale *généralisée* ou *impropre*.
  On pourra également parler d'intégrale généralisée convergente/divergente *en* b.
  On peut aussi la noter $\displaystyle\int_a^b f$.
- Analogie avec la théorie des séries (*cf* tableau page suivante).
- On définit de manière symétrique l'intégrale généralisée de f sur $]a, b]$ pour une fonction f continue par morceaux sur $]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
  On parlera dans ce cas d'intégrale généralisée convergente/divergente en a.
- *Étudier la nature d'une intégrale*, c'est dire s'il s'agit d'une intégrale « ordinaire » (intégrale d'une fonction continue / continue par morceaux sur un segment) ou d'une intégrale généralisée en précisant dans ce dernier cas si elle est convergente ou divergente.
  On commencera toujours par étudier la continuité de la fonction intégrée.
- Attention ! On n'écrira jamais $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ dans une égalité ou inégalité sans avoir justifié au préalable que cette écriture a un sens en tant que réel ou complexe c'est-à-dire que l'intégrale généralisée converge.

Exemple 3 : Déterminer la nature des intégrales suivantes et donner leur valeur en cas de convergence.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Analogie Séries / Intégrales généralisées

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Soit f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Étude de	Objet associé	Convergence lorsque	En cas de convergence
La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$	Suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$	$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$ existe dans $\mathbb{K}$	Somme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \overbrace{=}^{def.} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$
L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$	Fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ définie sur $[a,b[$	$\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K}$	Valeur de l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \overbrace{=}^{def.} \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

Proposition 10

Soit $f \in \mathscr{C}([a,b[,\mathbb{K})$. On suppose que b est un **réel**.
Si f admet une limite finie en b alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\underbrace{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}_{\substack{\text{intégrale généralisée} \\ \text{en } b \text{ convergente}}} = \underbrace{\int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t}_{\substack{\text{intégrale ordinaire} \\ \tilde{f} \text{ continue sur } [a,b]}} \quad \text{où } \tilde{f} \text{ est le prolongement par continuité de } f \text{ sur } [a,b].$$

L'intégrale est dite *faussement impropre en b.*

On notera que ce résultat ne peut pas être utilisé avec une borne infinie et qu'il ne s'agit que d'une implication (et non d'une équivalence).

Exemple 4 : Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\ln t\,\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

Proposition 11 (*Exemples fondamentaux*)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente.
- *Intégrales de Riemann :*
  - L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
  - L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

En cas de convergence, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$.

Proposition 12 (*Relation de Chasles*)

On considère l'intervalle $[a,b[$ où a et b vérifient $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b[,\mathbb{K})$.
Soit $c \in [a,b[$. Les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence, on a :

$$\underbrace{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}_{\substack{\text{intégrale généralisée} \\ \text{en } b \text{ convergente}}} = \underbrace{\int_a^c f(t)\mathrm{d}t}_{\text{intégrale ordinaire}} + \underbrace{\int_c^b f(t)\mathrm{d}t}_{\substack{\text{intégrale généralisée} \\ \text{en } b \text{ convergente}}}.$$

La nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de la borne qui pose problème et non de la borne incluse dans l'intervalle de continuité par morceaux.

2. Sur un intervalle du type $]a,b[$

Définition 13

On considère l'intervalle $]a,b[$ où a et b vérifient $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.
Soit $f \in \mathscr{C}_m(]a,b[,\mathbb{K})$.

- On dit que *l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *est convergente* lorsqu'il existe $c \in]a,b[$ tel que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent.
  Sinon, on dit qu'elle *est divergente*.
- En cas de convergence, on appelle *valeur de l'intégrale généralisée* et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ le scalaire :

$$\underbrace{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}_{\substack{\text{intégrale généralisée}\\ \text{en } a \text{ et } b \text{ convergente}}} = \underbrace{\int_a^c f(t)\mathrm{d}t}_{\substack{\text{intégrale généralisée}\\ \text{en } a \text{ convergente}}} + \underbrace{\int_c^b f(t)\mathrm{d}t}_{\substack{\text{intégrale généralisée}\\ \text{en } b \text{ convergente}}} .$$

- D'après la relation de Chasles, la nature des intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ et la somme de leurs valeurs en cas de convergence ne dépendent pas du réel c choisi dans $]a,b[$.

Exemple 5 : Étudier la nature des intégrales suivantes et déterminer leur valeur en cas de convergence.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

- Pour étudier $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $f \in \mathscr{C}_m(]a,b[,\mathbb{K})$, on peut aussi s'intéresser à la limite lorsque x tend vers a et y tend vers b de $\displaystyle\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$ et utiliser le résultat suivant :

Soit $f \in \mathscr{C}_m(]a,b[,\mathbb{K})$.
L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers a et y tend vers b.
En cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b}\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(sans importance ici sur l'ordre des limites).}$$

Si $a > b$ alors par définition, la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est celle de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et en cas de convergence, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

C. Propriétés de l'intégrale

Dans ce paragraphe, a et b désignent deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
On note I un intervalle dont les bornes sont a et b (incluses ou non dans l'intervalle).

Proposition 14

Soit $f \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq 0$.
Les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Proposition 15

Soit $f \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{C})$.
L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.
Dans ce cas, on a :

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f)(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f)(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue / continue par morceaux sur un segment s'étendent aux intégrales généralisées (par passage à la limite) à condition que **toutes les intégrales en jeu convergent**.

Soit f et g deux fonctions **continues par morceaux** sur l'**intervalle** I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
cf tableau page suivante

- Notons que la relation de Chasles reste vraie quelque soit l'ordre de a, b et c (réels ou infinis) tant que l'intégrale sur le plus grand intervalle converge.
- Pour la linéarité, attention de bien noter :
  - ⋆ la double conclusion (convergence de l'intégrale et valeur),
  - ⋆ les hypothèses, on ne peut pas découper sans la convergence des deux intégrales.

Exemple 6 :

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$ converge.
2. Peut-on écrire $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$?

NOM DE LA PROPRIÉTÉ	HYPOTHÈSES	CONCLUSION
Relation de Chasles	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge	$\forall c \in I,\ \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$
Linéarité	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent	$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
Positivité $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	▸ $a \leqslant b$ ▸ $\forall t \in I,\ f(t) \geqslant 0$ ▸ $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$
Stricte positivité $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	▸ f est continue sur I ▸ $a < b$ ▸ $\forall t \in I,\ f(t) \geqslant 0$ et $\exists t_0 \in I$ tel que $f(t_0) > 0$ ▸ $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$
Croissance $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	▸ $a \leqslant b$ ▸ $\forall t \in I,\ f(t) \leqslant g(t)$ ▸ $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
Stricte croissance $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	▸ f et g sont continues sur I ▸ $a < b$ ▸ $\forall t \in I,\ f(t) \leqslant g(t)$ et $\exists t_0 \in I$ tel que $f(t_0) < g(t_0)$ ▸ $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent	$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction continue et de signe constant	▸ $a \neq b$ ▸ f est continue sur I ▸ f est de signe constant sur I ▸ $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$	$\forall t \in I,\ f(t) = 0$

Pour simplifier l'écriture des deux résultats suivants, on suppose ici $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Théorème 16 (*Intégration par parties*)

Soit f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si la fonction $f \times g$ admet une limite finie en a et en b alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
On a de plus en cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$,
en notant $\big[f(t)g(t)\big]_a^b = \lim\limits_{t\to b} f(t)g(t) - \lim\limits_{t\to a} f(t)g(t)$.

Il est aussi possible d'effectuer l'intégration par parties sur un segment $[x,y]$ puis d'étudier soigneusement la limite lorsque x tend vers a et y tend vers b.

Exemple 7 :

1. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3}e^{-\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.
2. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 17 (*Changement de variable*)

Soit φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone sur $]a,b[$.
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $\varphi(]a,b[)$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\lim\limits_{t\to a}\varphi(t)}^{\lim\limits_{t\to b}\varphi(t)} f(x)\mathrm{d}x$ sont de même nature.

En cas de convergence, on a : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\lim\limits_{t\to a}\varphi(t)}^{\lim\limits_{t\to b}\varphi(t)} f(x)\mathrm{d}x$.

- Comme φ est continue et strictement monotone, elle réalise une bijection de $]a,b[$ sur $\varphi(]a,b[)$.
  De plus, on a $\varphi(]a,b[) = \begin{cases}]\lim\limits_{t\to a}\varphi(t), \lim\limits_{t\to b}\varphi(t)[& \text{si } \varphi \text{ est strictement croissante} \\ ]\lim\limits_{t\to b}\varphi(t), \lim\limits_{t\to a}\varphi(t)[& \text{si } \varphi \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$
- Seule l'hypothèse « de classe $\mathscr{C}^1$ » est nécessaire lorsque l'on intègre sur un segment, on ajoute l'hypothèse « strictement monotone » pour une intégrale généralisée.
- En particulier, les changements de variable affines du type $\varphi(t) = mt + p$, $m \neq 0$, vérifient les hypothèses requises. Ils peuvent permettre :
  - ⋆ de ramener un problème en $-\infty$ en $+\infty$: poser $x = -t$,
  - ⋆ de ramener un problème en a réel en 0 : poser $x = t - a$ ou $x = a - t$.

Exemple 8 : Prouver la convergence et déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^x}}$.

Proposition 18 (*Intégrale de Riemann*)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Corollaire 19

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. Soit $f \in \mathscr{C}_m(]-a, a[, \mathbb{K})$.

- On suppose que f est une fonction paire.
  Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge.
  De plus, en cas de convergence, on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$.
- On suppose que f est une fonction impaire.
  Alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge.
  De plus, en cas de convergence, on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Ce dernier résultat n'est pas au programme : il faut donc le redémontrer à chaque utilisation.

D. Intégrale généralisée de fonctions positives

1. Condition nécessaire et suffisante de convergence

Rappel : On suppose que a et b vérifient $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
Une fonction croissante sur $[a, b[$ admet une limite en b (limite finie ou $+\infty$).
De plus, cette limite est finie si et seulement si la fonction est majorée sur $[a, b[$.

Théorème 20

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, b[, \mathbb{R})$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$.
On suppose que f est à valeurs positives.
L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{a}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

On a un résultat similaire pour la borne inférieure.

On suppose que $f \in \mathscr{C}_m(]a, b], \mathbb{R}_+)$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$.
$\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{b} f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $]a, b]$.

Exemple 9 : Comparaison série / intégrale
Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0, +\infty[$, positive et décroissante.
Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Retrouver à l'aide de ce résultat la nature des séries de Riemann.

2. Théorèmes de comparaison

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ où $-\infty < a < b \leqslant +\infty$, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Comparaison par	Hypothèses	Conclusion
Inégalité	▸ $\forall t \in [a,b[,\ f(t) \leqslant g(t)$ ▸ $\forall t \in [a,b[,\ f(t) \geqslant 0$ ▸ $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge	$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge
	▸ $\forall t \in [a,b[,\ f(t) \leqslant g(t)$ ▸ $\forall t \in [a,b[,\ f(t) \geqslant 0$ ▸ $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge	$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge
Négligeabilité « petit o » / Domination « grand o »	▸ $f(t) = \underset{b}{o}\big(g(t)\big)$ ou $f(t) = \underset{b}{O}\big(g(t)\big)$ ▸ $\forall t \in [a,b[,\ g(t) \geqslant 0$ ▸ $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge	$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge (absolument)
	▸ $f(t) = \underset{b}{o}\big(g(t)\big)$ ou $f(t) = \underset{b}{O}\big(g(t)\big)$ ▸ $\forall t \in [a,b[,\ g(t) \geqslant 0$ ▸ $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge	$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge
Équivalent	▸ $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$ ▸ $\forall t \in [a,b[,\ g(t) \geqslant 0$ (ou $f(t) \geqslant 0$) ▸ $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge (respectivement diverge)	$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge (resp. diverge)

▸ Attention à l'hypothèse de positivité et bien noter que la comparaison porte sur les fonctions intégrées et non sur les intégrales.

▸ Le réel a n'a ici aucune importance, il faut juste le choisir dans l'intervalle où f et g sont continues par morceaux. On peut remplacer dans les énoncés « $\forall t \in [a,b[$ » par « au voisinage de b^- ».

▸ On compare souvent avec une intégrale de Riemann.
Pour établir une relation de négligeabilité, on pourra étudier la limite $\lim\limits_{\substack{t\to+\infty \\ \text{ou } 0}} \dfrac{f(t)}{1/t^\alpha} = \lim\limits_{\substack{t\to+\infty \\ \text{ou } 0}} t^\alpha f(t)$, en particulier pour $\alpha = 2 > 1$, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, $\alpha = 1$.

⋆ *Intégrale généralisée en* $+\infty$ *:* on peut conclure si l'on trouve $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ ou $\alpha \leqslant 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$.

⋆ *Intégrale généralisée en* 0 *:* on peut conclure si l'on trouve $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\alpha f(t) = 0$ ou $\alpha \geqslant 1$ tel que $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\alpha f(t) = +\infty$.

Exemple 10 : Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \ ,\ \int_0^1 \frac{e^t}{\arctan(t)}\,\mathrm{d}t \ ,\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}e^{-x}}.$$

- Les théorèmes de comparaison s'appliquent plus généralement avec des fonctions de signe constant au voisinage de b (on les applique à $-f$ si f est négative). Pour des fonctions qui changent constamment de signe au voisinage de b ou dont le signe est difficile à déterminer, on pourra penser à étudier la convergence absolue.

3. Convergence absolue et fonctions intégrables

Dans ce paragraphe, a et b désignent deux éléments de $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

Définition 21

On dit que *l'intégrale généralisée* $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ *converge absolument* lorsque l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ converge.

Pour prouver la convergence absolue d'une intégrale, on peut utiliser les théorèmes de comparaison avec $|f|$.

Théorème 22 (*Inégalité triangulaire*)

Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument alors elle converge et on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 11 : Déterminer la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^\alpha)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ avec $\alpha > 0$.

Exemple : On peut montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge mais ne converge pas absolument (*cf* exercice 6). Ainsi, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$.

Définition 23

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On dit que f est *intégrable sur* I lorsque f est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.
On la note alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_I f$.

Proposition 24

L'ensemble des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté $L^1(I,\mathbb{K})$.

- Si f est intégrable sur $[a, b[$ (respectivement $]a, b]$), on dira aussi que f est *intégrable en* b (respectivement *en* a).
- On peut reformuler certains énoncés en terme de fonctions intégrables.

Proposition 25 (*Intégrales de Riemann*)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha < 1$.
- La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable en a si et seulement si $\alpha < 1$.

Proposition 26

La fonction $t \mapsto f(t)$ est intégrable en a^+ si et seulement si $x \mapsto f(a+x)$ l'est en 0^+.
La fonction $t \mapsto f(t)$ est intégrable en b^- si et seulement si $x \mapsto f(b-x)$ l'est en 0^+.

Proposition 27 (*Théorèmes de comparaison*)

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$.

- Si $f(t) \underset{t \to b}{\sim} g(t)$ alors l'intégrabilité de f en b est équivalente à celle de g.
- Si $f(t) = \underset{t \to b}{o}\big(g(t)\big)$ (ou $f(t) = \underset{t \to b}{O}\big(g(t)\big)$) alors l'intégrabilité de g en b implique celle de f.

III. Suites et séries de fonctions intégrables

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

A. Théorème de convergence dominée

Théorème 28 (*Théorème de convergence dominée*)

Soit I un intervalle.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I et f une fonction continue par morceaux sur I.

Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction f,

$\boxed{2}$ il existe une fonction φ, intégrable sur I, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in I$, $|f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors les fonctions f_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f sont intégrables sur I et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ (interversion limite/intégrale).

- Nous avons déjà vu un théorème d'interversion limite-intégrale pour une suite de fonctions continues sur un segment convergeant uniformément. Ces hypothèses sont restrictives (continuité, segment, convergence uniforme). Ce théorème (dû à Lebesgue) est plus général et plus simple à utiliser. On pourra cependant toujours utiliser le premier théorème dans les cas où la convergence uniforme est déjà acquise (par exemple sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence pour une série entière).
- Pour l'hypothèse de domination, on pourra penser à utiliser les inégalités classiques suivantes :

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R},\ e^x - 1 \geqslant x \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leqslant |x|.$$

Exemple 12 :

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + e^x}$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n^2} \mathrm{d}t$.

B. Théorème d'intégration terme à terme

Théorème 29 (*Théorème d'intégration terme à terme*)

Soit I un intervalle.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur I et S une fonction continue par morceaux sur I.

Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et a pour somme S,

$\boxed{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I,

$\boxed{3}$ la série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors la fonction S est intégrable sur I et on a :

$$\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire $\displaystyle\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ (intégration terme à terme).

Exemple 13 : Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^2 e^{-nt}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}$.

Important : S'il n'est pas possible d'appliquer ce théorème, on peut parfois justifier l'intégration terme à terme en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 14 : Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ et en déduire la valeur de cette somme.

IV. Intégrales à paramètre

Soit I et J deux intervalles. Soit f une fonction définie sur $I \times J$.
On s'intéresse à la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_I f(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction g est bien définie sur J si et seulement si pour tout $x \in J$, l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t,x)\,\mathrm{d}t$ converge.

A. Continuité

Théorème 30 (*Théorème de continuité*)

On suppose que pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux sur I.

Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est continue sur J,

$\boxed{2}$ il existe une fonction φ, intégrable sur I, telle que pour tout $(t,x) \in I \times J$, on a $|f(t,x)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est bien définie et continue sur J.

Comme la continuité est une propriété locale, on peut appliquer le théorème sur tout segment inclus dans J c'est-à-dire remplacer le deuxième point par :

$$\text{pour tout segment } K \text{ inclus dans } J, \text{ il existe une fonction } \varphi_K, \text{ intégrable sur } I,$$

$$\text{telle que pour tout } (t,x) \in I \times K, \text{ on a } |f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t).$$

Il est aussi possible de se placer sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Exemple 15 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que sa *transformée de Fourier* $\hat{f} : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{itx}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

B. Limites

Théorème 31 (*Théorème de convergence dominée à paramètre continu*)

On suppose que pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux sur I.
Soit ℓ une fonction continue par morceaux sur I.
Soit a une borne (finie ou infinie) de J.

Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ pour tout $t \in I$, $f(t,x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell(t)$,

$\boxed{2}$ il existe une fonction φ, intégrable sur I, telle que pour tout $(t,x) \in I \times J$, on a $|f(t,x)| \leqslant \varphi(t)$.

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et $g(x) = \displaystyle\int_I f(t,x)\,\mathrm{d}t \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 16 : Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $L(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que L est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ puis que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} L(x) = 0$.

C. Dérivation

Théorème 32 (*Théorème de dérivation*)

On suppose que pour tout $x \in J$, les fonctions $t \mapsto f(t,x)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ sont continues par morceaux sur I (existence de la dérivée partielle découlant de l'hypothèse 1).

Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur J,

$\boxed{2}$ pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur I,

$\boxed{3}$ il existe une fonction φ, intégrable sur I, telle que pour tout $(t,x) \in I \times J$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J et on a :

$$\forall x \in J,\ g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

Comme la classe $\mathscr{C}^1$ est une propriété locale, on peut appliquer le théorème sur tout segment inclus dans J ou d'autres intervalles inclus dans J adaptés à la situation.

Exemple 17 : Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Théorème 33 (*Extension à la classe $\mathscr{C}^k$*)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que pour tout $x \in J$, pour tout $\ell \in [\![0,k]\!]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(t,x)$ est continue par morceaux sur I (existence des dérivées partielles découlant de l'hypothèse 1).

Hyp. On suppose que :

$\boxed{1}$ pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur J,

$\boxed{2}$ pour tout $x \in J$, pour tout $\ell \in [\![0,k-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(t,x)$ est intégrable sur I,

$\boxed{3}$ il existe une fonction φ, intégrable sur I, telle que pour tout $(t,x) \in I \times J$, on a $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(t,x)\right| \leqslant \varphi(t)$.

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J et on a :

$$\forall \ell \in [\![1,k]\!],\ \forall x \in J,\ g^{(\ell)}(x) = \int_I \frac{\partial^\ell f}{\partial x^\ell}(t,x)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 18 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f est à décroissance rapide c'est-à-dire pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(t) \underset{|t|\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^n}\right)$.
Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\hat{f}^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.