complexes - primitive et intégrales - equa diff
DS4 - durée : 3h

La calculatrice est interdite.

Exercice 1 :

Calculez les intégrales ou les primitives suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\ dx$
2. $\int_0^1 x^2 e^{2x}\ dx$
3. $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\ dx$
4. Déterminer une primitive de $x \mapsto e^x \cos(3x)$ sur $\mathbb{R}$.

---

1. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\ dx = [-\frac{1}{2}\cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}(0-1) = \frac{1}{2}$
2. On va faire deux IPP successives, la première en posant $u = x^2$ et $v' = e^{2x}$, donc $u' = 2x$ et $v = \frac{1}{2}e^{2x}$, ce qui donne
$$\int_0^1 x^2 e^{2x}\ dx = [\frac{1}{2}x^2e^{2x}]_0^1 - \int_0^1 xe^{2x}dx$$
et on recommence avec $u = x$, $v' = e^{2x}$, d'où $u' = 1$ et $v = \frac{1}{2}e^{2x}$, ce qui donne
$$\int_0^1 xe^{2x}dx = [\frac{1}{2}xe^{2x}]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}[e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$
Finalement
$$\int_0^1 x^2e^{2x}\ dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2-1)$$
3. Le dénominateur admet deux racines, -1 et -2 : on cherche A et B réels tels que
$$\frac{1}{x^2+3x+2} = A\frac{1}{x+1} + B\frac{1}{x+2}$$
D'où $1 = (A+B)x + 2A + B$, c'est à dire $\left\{\begin{array}{ll} A+B & = 0 \\ 2A+B & = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} A & = 1 \\ B & = -1 \end{array}\right.$
Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\ dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\ dx = [\ln(x+1) - \ln(x+2)]_0^1$
et enfin
$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\ dx = \ln 2 - \ln(3) + \ln(2) = \ln(\frac{4}{3})}$$
4. On peut enchainer deux IPP, ou passer par les complexes (ce qui me parait le plus efficace)
Notons $f : x \mapsto e^x\cos(3x)$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x\cos(3x) = Re(e^xe^{i3x}) = Re(\varphi(x))$ où $\varphi(x) = e^{(1+3i)x}$
Une primitive de φ est $\Phi : x \mapsto \frac{1}{1+3i}e^{(1+3i)x}$
Or $\Phi(x) = \frac{1}{10}(1-3i)e^xe^{3ix} = \frac{e^x}{10}(1-3i)(\cos(3x) + i\sin(3x))$
D'où $Re(\Phi(x)) = \frac{e^x}{10}(\cos(3x) + 3\sin(3x))$
une primitive de f est donc $F : x \mapsto \frac{e^x}{10}(\cos(3x) + 3\sin(3x))$.

Exercice 2 :

Soit l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$(E) : y''(x) + y(x) = e^x + e^{-x}$$

1. Résoudre $(E_h) : y'' + y = 0$
2. On pose les équations
$$(E_1) : y''(x) + y(x) = e^x \quad \text{et} \quad (E_2) : y''(x) + y(x) = e^{-x}$$
   a) Vérifiez que si y_1 est solution de (E_1) et y_2 est une solution de (E_2), alors $y_p = y_1 + y_2$ est solution de (E)
   b) Trouvez une solution particulière de (E_1), puis de (E_2) et donnez l'ensemble des solutions de (E).
3. Soit maintenant une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable vérifiant :
$$(\mathcal{R}) : \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x$$
   a) Montrez que f est dérivable deux fois, avec, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^x + f'(-x)$.
   b) En déduire que f est une solution de (E), et déterminez l'ensemble des fonctions f vérifiant $(\mathcal{R})$.

1. cf DM : $\exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$
2. a) Soit y_1 une solution de (E_1) et y_2 une solution de (E_2). Alors $y_1''+y_1 = e^x$ et $y_2''+y_2 = e^{-x}$
   De plus, $y_p'' = y_1'' + y_2''$, donc $y_p'' + y_p = y_1'' + y_1 + y_2'' + y_2 = e^x + e^{-x}$ en rangeant juste un peu :-)
   Ainsi, y_p est bien une solution de E.

   b) On cherche une solution particulière de E_1 sous la forme $y_1 = Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$. Alors $y_1'' = Ce^x$ également et y_1 est solution si et seulement si $2Ce^x = e^x$, autrement dit si et seulement si $C = \frac{1}{2}$.
   Ainsi, $y_1 = \frac{1}{2}e^x$ est une solution de particulier de E_1.
   Un calcul quasi identique donne $y_2 = \frac{1}{2}e^{-x}$ comme solution de E_2.
   On en déduit que $y_p = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$ est une solution particulier de E.
   L'ensemble des solutions de E est donc
$$\exists A, B \in \mathbb{R}, y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + \mathrm{ch}(x)$$
3. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^x - f(-x)$.
   La fonction exponentielle est dérivable, et $x \mapsto f(-x)$ est dérivable par composition de fonctions dérivables. Ainsi par somme, f' est dérivable et on a
$$f''(x) = e^x - (-f'(-x)) = e^x + f'(-x)$$
   b) C'est la discussion habituelle : comme l'égalité $\mathcal{R}$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut remplacer x par $-x$ et il vient $f'(-x) = e^{-x} - f(x)$
   En injectant dans la formule obtenue pour f'', il vient
$$f''(x) = e^x - f(x) + e^{-x}$$
   c'est à dire :
$$f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x}$$
   donc f est bien une solution de (E).
   Ainsi, il existe $A, B \in \mathbb{R}, f(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + \mathrm{ch}(x)$
   Il faut maintenant rechercher si il y a des conditions sur A et B :
   Soit f une telle fonction. f vérifie $\mathcal{R}$ si et seulement si
$$f'(x) + f(-x) = e^x$$
   c'est à dire si et seulement si
$$-A\sin(x) + B\cos(x) + \mathrm{sh}(x) + A\cos(-x) + B\sin(-x) + \mathrm{ch}(-x) = e^x$$
$$\Leftrightarrow (A+B)\cos(x) - (A+B)\sin(x) + e^x = e^x$$
$$\Leftrightarrow (A+B)(\cos(x) - \sin(x)) = 0$$
   Comme $\cos(x) - \sin(x)$ n'est pas la fonction nulle, cette dernière condition équivaut à $A = -B$ (je vous assure qu'il y a parfois d'autres conditions...) et on en conclut que
$$\boxed{\mathcal{R} \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}, f : x \mapsto A(\cos(x) - \sin(x)) + \mathrm{ch}(x)}$$

Exercice 3 :

Cette exercice est constitués de deux parties indépendantes.

1. 1ere Partie : racines 7ème de l'unité

   On se propose de (re)résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ suivante :

   $$(E) \qquad z^7 = 1$$

   On demande dans cette partie de **redémontrer la démarche de détermination des racines n−ième de l'unité.**

   a) Justifiez qu'on peut chercher z sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   b) Déterminez les 7 solutions de l'équation (E) (en justifiant qu'il n'y en a pas d'autres).
   c) Soit $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_6$ les solutions trouvées précédemment. Calculez $\prod_{k=0}^{6} \omega_k$.

2. 2e Partie : jeu avec une racine

   Soit $u = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. On pose $a = u + u^2 + u^4$ et $b = u^3 + u^5 + u^6$.
   a) Justifiez que $u^7 = 1$. Déterminez $k \in [\![0; 6]\!]$ tel que $u^8 = u^k$. Même question avec u^9 et u^{10}.
   b) Calculer $s = a + b$.
   c) Calculer $p = ab$.
   d) Montrez que a et b sont les racines du polynôme $X^2 - sX + p$. En déduire que a et b appartiennent à l'ensemble $\left\{\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}\right\}$.
   e) On admet que $a = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $b = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.
   Calculez $C = \cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{8\pi}{7})$ et $S = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7})$.

---

1. 1ere Partie : racines 7ème de l'unité

   a) Comme $0^7 = 0 \neq 1$, 0 n'est pas solution de E. On résout donc l'équation sur $\mathbb{C}^*$ où tout complexe peut se représenter avec l'écriture exponentielle. On cherche donc z sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
   b) Par unicité de l'écriture exponentielle (à $2k\pi$ près pour les arguments), et en écrivant $1 = e^{i0}$, on a :

   $$\left(\rho e^{i\theta}\right)^7 = e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^7 & = 1 \\ \exists k \in \mathbb{N}; 7\theta & = 2k\pi \end{cases}$$

   On résout le système, et il vient $\rho = 1$ et $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{2k\pi}{7}$. L'ensemble des solutions est donc

   $$S = \{e^{i\frac{2k\pi}{7}}, k \in \mathbb{Z}\}$$

   On peut traiter maintenant le fait qu'il n'y a que 7 solutions de plusieurs façon.
   Avec les polynômes, c'est le plus rapide : on cherche en fait les racines de $X^7 - 1$, qui est de degré 7, donc admet au plus 7 racines.
   Comme pour $k \in [\![0, 6[\![$, $\frac{2k\pi}{7} \in [0, 2\pi[$, les nombres $e^{i\frac{2k\pi}{7}}$ sont tous distincts, et sont donc les 7 seules solutions de l'équation.

   $$\boxed{S = \left\{z = e^{i\frac{2k\pi}{7}}, k \in [\![0; 6]\!]\right\}}$$

   c) Une première technique est d'écrire $P = \prod_{k=0}^{6} \omega_k = \prod_{k=0}^{6} e^{i\frac{2k\pi}{7}} = \exp(\sum_{k=0}^{6} \frac{ki2\pi}{7})$.
   Or $\sum_{k=0}^{6} \frac{ki2\pi}{7} = i\frac{2\pi}{7} \sum_{k=0}^{6} k = i\frac{2\pi}{7} \times \frac{6 \times 7}{2} = 6i\pi$, donc $P = e^{i6\pi} = 1$ ainsi $\boxed{\prod_{k=0}^{6} \omega_k = 1}$
   On peut aussi utiliser le lien entre les racines des polynômes et les coefficients d'un polynôme, qui donne directement que $\prod_{k=0}^{6} \omega_k = (-1)^7 \frac{-1}{1} = 1$.

2. 2e Partie : jeu avec une racine

   a) On a $u^7 = e^{i2\pi} = 1$. Comme $u^8 = u.u^7$, on obtient $\boxed{u^8 = u}$, et de même $\boxed{u^9 = u^2}$ et $\boxed{u^{10} = u^3}$.

b) on a $s = u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6 = \sum_{k=1}^{6} u^k = u\frac{1-u^6}{1-u} = \frac{u-u^7}{1-u} = \frac{u-1}{1-u} = -1$. $\boxed{s=-1}$
Alternativement, on peut aussi utiliser le lien entre les racines et les coefficients, puisque celui ci donne $\sum_{k=0}^{6} \omega_k = 0$. Comme $\omega_0 = 1$, on a donc $\sum_{k=1}^{6} u^k = -1$.

c) $p = (u+u^2+u^4)(u^3+u^5+u^6) = u^4+u^6+u^7+u^5+u^7+u^8+u^7+u^9+u^{10}$. En réorganisant la somme et en utilisant le résultat obtenu en 1), on obtient $P = 3+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6 = 3+S = 2$. $\boxed{P=2}$.

d) Le polynôme $(X-a)(X-b)$ a pour racines a et b. En le développant, il vient $X^2-(a+b)X+ab = X^2-sX+p$. Or, on vient de calculer $S = a+b$ et $P = ab$: a et b sont donc les solutions de l'équation complexe $z^2+z+2=0$, dont les racines sont $\boxed{\frac{-1+i\sqrt{7}}{2} \text{ et } \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}.}$

Remarque : L'énoncé donnait le résultat, mais on peut par exemple interpréter a et b sous la forme d'addition de vecteurs du plan, et on déduit alors que $\mathcal{I}m(a) > \mathcal{I}m(b)$ d'où $a = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$ et $b = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$.

e) Il suffit d'observer que $C+iS = a$. Il reste à utiliser l'unicité d'écriture de la forme algébrique pour déduire $\boxed{C = \frac{-1}{2} \text{ et } S = \frac{\sqrt{7}}{2}.}$

Exercice 4 : Intégrale de Wallis : intégrales et trigonométrie !

Le but du problème est de calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$$

Si la fin de l'exercice est un peu délicat, le début est accessible à tous !

1. Calculez I_0 et I_1
2. Exprimez $\cos^2(t)$ et $\cos^3(t)$ en fonction de combinaison linéaire de termes de la forme $\cos(kt)$ avec k entiers.
3. Calculez I_2 et I_3
4. En intégrant par partie, montrez que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
5. En déduire par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \frac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}$.
6. Montrez que la suite (u_n) définie par $u_n = (nI_nI_{n-1})$ est constante. On précisera la valeur de cette constante.
7. En déduire une expression de I_{2p+1}.

1. $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$ sans difficulté.
2. On sait que $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$, donc $\boxed{\cos^2(t) = \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)}$
   Pour $\cos^3(t)$, on peut écrire que $\cos^3 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3$ pour obtenir, après développement via un joli binôme, $\boxed{\cos^3 t = \frac{1}{4}(\cos(3t)+3\cos(t)).}$
3. En utilisant les résultat précédent :
$$I_2 = \left[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\sin(2t)+t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$
$$I_3 = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin(3t)+3\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}(-\frac{1}{3}+3) = \frac{2}{3}$$
4. Soit $n \geq 1$. En écrivant que $(\cos t)^n = (\cos t)(\cos t)^{n-1}$ et en intégrant par partie avec $u(t) = (\cos t)^{n-1}$ et $v'(t) = \cos t$, donc $u'(t) = -(n-1)(\cos t)^{n-2}\sin t$ et $v(t) = \sin t$, on a
$$\begin{aligned} n\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt &= [n \sin t \cos(t)^{n-2}]_0^{\frac{pi}{2}} + n(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-2}\sin^2 t dt \\ &= 0 + n(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{n-2} dt - n(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \end{aligned}$$

En remplaçant $\sin^2 t$ par $1-\cos^2 t$ pour cette dernière égalité. On reconnait alors I_n et on a

$$nI_n + n(n-1)I_n = n(n-1)I_{n-2},$$

d'où, après factorisation et simplification :

$$\boxed{nI_n = (n-1)I_{n-2}}$$

5. On va procéder par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$:
   Initialisation : la formule est valable pour $p = 0$ d'après le calcul de la question 2.
   Hérédité : pour simplifier (un peu) les calculs, on va supposer la formule vraie à $p-1$ et on va la montrer pour p :
   Soit $p \geq 1$, on a $I_{2(p-1)} = \dfrac{\pi(2(p-1))!}{2^{2(p-1)+1}((p-1)!)^2} = \dfrac{\pi(2p-2)!}{2^{2p-1}((p-1)!)^2}$.
   D'après la relation établie dans la question précédente avec $n = 2p$, on a

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{2p-1}{2p} I_{2(p-1)} \\ &= \frac{2p-1}{2p} \frac{\pi(2p-2)!}{2^{2p-1}((p-1)!)^2} \\ &= \frac{\pi(2p-1)!}{2 \times 2^{2p-1} p((p-1)!)^2} \\ &= \frac{2p\pi(2p-1)!}{2p \times 2 \times 2^{2p-1} p((p-1)!)^2} \\ &= \frac{\pi(2p)!}{2^{2p-1+2}(p(p-1)!)^2} \\ I_{2p} &= \frac{\pi(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2} \end{aligned}$$

   L'hérédité est vérifiée et le principe de récurrence garanti que la formule est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
6. Soit $n \geq 2$, alors $u_n = nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-2}I_{n-1} = u_{n-1}$. Donc la suite (u_n) est constante et vaut $u_1 = I_0I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.
7. Soit $p \geq 0$, alors $u_{2p+1} = (2p+1)I_{2p+1}I_{2p} = \dfrac{\pi}{2}$, d'où

$$I_{2p+1} = \frac{\pi}{2}/((2p+1)I_{2p}) = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p)!(2p+1)} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

Exercice 5 : Bonus

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. On veut calculer les trois sommes suivantes :

$$A = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$$

$$B = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots$$

$$C = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots$$

autrement dit, on fait la somme des coefficients binomiaux de 3 en 3.

1. Que vaut $A + B + C$?
2. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$
   a) Montrez que $1 + j + j^2 = 0$
   b) Calculez $A + jB + j^2C$ et $A + j^2B + jC$
   c) En déduire les valeurs de A, B et C

1. Quand on fait la somme $A + B + C$, tous les coefficients binomiaux sont pris, et on retombe sur une formule connue via le binome de Newton :

$$A + B + C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

2. a) Comme $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ le calcul donne directement

$$1 + j + j^2 = 1 - 1 = 0$$

On peut aussi dire que $1, j$ et j^2 sont les racines du polynômes $X^3 + 1$, dont le coefficient en 2 vaut 0 : la somme des racines vaut donc $-0/1 = 0$.

b) La clef est d'observer que $j^k = 1$ si k est un multiple de 3, $j^k = j$ si k s'écrit $3p + 1$ et $j^k = j^2$ si $k = 3p2$.

Ainsi, $A + jB + J^2C = \sum_{k=0}^{n} j^k \binom{n}{k} = (j+1)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n$

De même, $(j^2)^k = 1$ pour $k = 3p$, $(j^2)^k = j^2$ pour $k = 3p+1$ et $(j^2)^k = j$ pour $k = 3p+2$ d'où $A + j^2B + jC = (1 + j^2)^n = \left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^n$

c) On doit maintenant résoudre un système très compliqué si on veut faire ça avec le pivot de Gauss, mais qui se simplifie si on utilise la question $2a$:

$$\begin{cases} A + B + C &= 2^n & (1) \\ A + jB + j^2C &= e^{in\frac{\pi}{3}} & (2) \\ A + j^2B + jC &= e^{-in\frac{\pi}{3}} & (3) \end{cases}$$

En calculant $(1) + (2) + (3)$ il vient $3A + (1 + j + j^2)B + (1 + j^2 + j)C = 2^n + e^{in\frac{\pi}{3}} + e^{-in\frac{\pi}{3}}$
Or $1 + j + j^2 = 0$, et $e^{in\frac{\pi}{3}} + e^{-in\frac{\pi}{3}} = 2\cos(n\frac{\pi}{3})$.

On en déduit donc $\boxed{A = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)}$

En calculant $(1) + j^2(2) + j(3)$, c'est cette fois ci $3B$ qui est isolé (puisque $j^3 = 1$) et les termes en A et C disparaissent pour donner

$$3B = 2^n + e^{i(n\frac{\pi}{3} + 4\frac{\pi}{3})} + e^{i(-n\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})}$$

Les termes en exponentiels sont plus durs à traiter : l'idée est de faire pareil que pour A. On veut une formule d'Euler. La clef, pas évidente, est de factoriser par $e^{i\pi}$:

$$e^{i(n\frac{\pi}{3} + 4\frac{\pi}{3})} + e^{i(-n\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\pi}(e^{i(n\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3})} + e^{i(-n\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3})}) = -2\cos((n+1)\frac{\pi}{3})$$

Ainsi $\boxed{B = \frac{1}{3}\left(2^n - 2\cos\left((n+1)\frac{\pi}{3}\right)\right)}$

Enfin, $(1) + j(2) + j^2(3)$ fait disparaitre A et B pour donner $3C$, et une manipulation similaire à ce qu'on a fait pour B (en factorisant par $e^{i2\pi}$) donne

$$\boxed{C = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left((n+2)\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

Ouf ! (c'est probablement une des questions les plus techniques que je vous ai jamais donné...)