Devoir sur table de mathématiques n° 3

jeudi 19 décembre 2024
4 heures · 12h45-16h45

Présentation générale de la copie

- ☐ **Sur la première copie uniquement :** NOM Prénom, classe, référence du devoir, place pour les annotations.
- ☐ **Sur les copies suivantes :** NOM et numéro de la copie en bas à droite
- ☐ Feuilles rangées dans l'ordre
- ☐ Marge à gauche de 4 cm sur toutes les pages
- ☐ Rien dans la marge **sauf** les numéros de questions
- ☐ Correcteur blanc et crayon de papier interdits
- ☐ Résultats mis en évidence
- ☐ **FIN** écrit à la fin du devoir.

Rédaction

- ☐ Phrases délimitées par points et majuscules
- ☐ Écriture lisible et sur les lignes
- ☐ Pas d'abréviations
- ☐ Orthographe convenable
- ☐ Correction de la langue (pas de « on a que »)

Rédaction mathématique

- ☐ Pas de formule déconnectée du raisonnement
- ☐ Usage de $\forall$ / $\exists$: **toujours devant une formule**
- ☐ Usage de $\Leftrightarrow$ / « donc » / $\Rightarrow$
- ☐ Variables toujours introduites :
  - dans le texte (« Soit $x \in \cdots$ »)
  - et dans les formules ($\forall / \exists\, x \in \cdots$)
- ☐ Distinction f / $f(x)$
- ☐ Nature des objets (objets nuls 0 / 0_E / 0_n / $\mathbf{0}$ / $\{0_E\}$)

Séries entières

Exercice 1

On définit, pour tout entier naturel non nul n : $\quad h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On introduit les séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 1} h_n\, x^n, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}\, x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{h_n}{n}\, x^n,$$

dont les sommes sont notées respectivement : H, S et T.
On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série définissant H.

1) Soit n un entier naturel non nul.
Justifier que $h_{2n} - h_n \geqslant \frac{1}{2}$.

2) Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

3) Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant H. En déduire l'intervalle I.

4) Déterminer les rayons de convergence des séries entières définissant S et T.

5) Quel est le développement en série entière de la fonction $\big(g :\ x \mapsto \ln(1-x)\big)$? Préciser son rayon de convergence.

6) Justifier que la fonction

$$G :\ x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.
Établir une relation entre G et H.

Soit L la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0) = 0$.

7) Exprimer L à l'aide de la fonction $\big(g : x \mapsto \ln(1-x)\big)$.

8) Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière. *On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.*

9) En déduire une relation entre $T - S$ et L.

Exercice 2

1) Question préliminaire
En utilisant l'égalité $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, démontrer que la suite $\big(\cos(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n\, x^n$ où :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\cos(n)}{n}.$$

On note R son rayon de convergence.

2) Montrer que $R \geqslant 1$.

3) Prouver que la série de terme général $\cos(n)$ diverge.

4) En déduire la valeur de R.

On note alors, pour tout $x \in]-R,R[$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n}\, x^n.$$

5) Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière définie par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n}\, x^n$$

où i désigne le nombre complexe usuel tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

6) En déduire une expression simple de $f'(x)$ pour tout $x \in]-R,R[$.

7) Déterminer alors une expression de la somme de la série entière proposée à l'aide de fonctions usuelles.

8) En déduire le rayon de convergence et la somme $g(x)$ de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos^2(n/2)}{n}\, x^n.$$

Suite du sujet au verso ►

Algèbre linéaire

Problème

Racine cubique d'une matrice

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A.

I — Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice A.

1) Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = P\,D\,P^{-1}$ avec :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

2) Montrer qu'une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si et seulement si $\Delta = P^{-1}\,B\,P$ est une racine cubique de D.

3) Soit $\Delta \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D. Montrer que les matrices D et Δ commutent, puis en déduire que la matrice Δ est diagonale.

4) Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D, puis l'ensemble des racines cubiques de A.
On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ.

II — Dans un plan euclidien

Dans cette partie, on considère un plan euclidien orienté E muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_x, e_y)$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On note u_θ et v_θ les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathscr{B}$ sont $M(\theta)$ et $N(\theta)$.

5) **a.** Représenter graphiquement les vecteurs $u_\theta(e_x)$ et $u_\theta(e_y)$. Comment s'appelle l'endomorphisme u_θ ?

b. Conjecturer une racine cubique de $M(\theta)$.

c. Démontrer que :

$$\forall\, \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad M(\theta) \times M(\theta') = M(\theta + \theta').$$

Démontrer alors la conjecture de la question précédente.

6) **a.** Calculer le polynôme caractéristique de $N(\theta)$.

b. Montrer que la matrice $N(\theta)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, et déterminer ses éléments propres.

c. Qui est l'endomorphisme v_θ ?

d. Déterminer une racine cubique de $N(\theta)$.

III — Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres deux à deux distinctes de la matrice A.

Existence d'une racine cubique polynomiale

7) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une racine cubique de la matrice :

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}).$$

8) Déduire de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique. *On pourra remarquer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme $H_p(\lambda)$ avec $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.*

Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d} \left(X^3 - \lambda_k\right).$$

9) Montrer que les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont non nuls.

10) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous la forme $\lambda = \rho\, e^{i\,\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement trois solutions.

11) En déduire que le polynôme Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

12) Déduire des questions précédentes que si B est une racine cubique de A, alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

— FIN —