Corrigé du devoir surveillé nº 3 (v2)

extrait d'E3A PC 2018

Exercice 1

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On introduit les sommes H, S et T de séries entières par les expressions :

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n \quad \text{et} \quad T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n} x^n.$$

On note I l'ouvert de convergence de la série entière de somme H.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $h_{2n} - h_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Mais $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2n}$ pour tout $k \in [\![n+1\,;2n]\!]$, donc : $h_{2n} - h_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

2) ∗ La suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. **Ou bien** elle est majorée (et par le théorème de la limite monotone, elle tend vers une limite finie), **ou bien** non majorée (et elle tend vers $+\infty$). Le contraire de $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ est donc « $(h_n)_{n\geqslant 1}$ admet une limite finie ».

∗ **Par l'absurde,** supposons que $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge, et notons ℓ sa limite (finie). Par le théorème des suites extraites, $h_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ également.
Par différence de limites finies : $h_n - h_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell - \ell = 0$.
Mais puisque pour tout $n \geqslant 1$, $h_n - h_{2n} \geqslant \frac{1}{2}$, par passage à la limite dans les inégalités larges : $0 \geqslant \frac{1}{2}$, qui est une **contradiction**.

Conclusion : La suite $(h_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$.

3) ∗ En $x = 1$, la série $\sum_{n\geqslant 1} h_n 1^n$ est grossièrement divergente car son terme général tend vers $+\infty$; donc $R_H \geqslant 1$.

∗ En outre : $0 \leqslant h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1 = n$ donc $h_n = \mathrm{O}(n)$. Le rayon de convergence cherché est au moins égal à celui de $\sum_{n\geqslant 1} n x^n$, qui vaut 1 (série entière usuelle pour $\alpha = -1$). Ainsi $R_H \geqslant 1$.

Conclusion : La série $\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n$ a pour rayon de convergence $R_H = 1$.
Son intervalle ouvert de convergence est $I =]-1, 1[$.

Remarque. La règle de d'Alembert fonctionne également pour obtenir ce rayon de convergence, **à condition** de justifier sérieusement la limite obtenue.

4) • La série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} x^n$ est une série entière de référence : $R_S = 1$.

Remarque. On peut aussi refaire la preuve par échantillonage ; en $x = 1$, le terme général tend vers 0 ; en $x > 1$, il tend vers $+\infty$ par croissances comparées.

• La série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{h_n}{n} x^n$ a même rayon de convergence que $\sum_{n\geqslant 1} h_n x^n$, car multiplier par n les coefficients ne modifie pas le rayon de convergence : $R_T = R_H = 1$.

5) Soit $g(x) = \ln(1-x)$ pour tout réel $x < 1$.

On sait que : $\forall u \in]-1, 1[\,,\ \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} u^n$.

Comme pour tout $x \in]-1, 1[$, $-x \in]-1, 1[$, par changement de variable :

$$\forall x \in]-1,1[\,,\ \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

La série entière ci-dessus a même rayon de convergence que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$, série entière usuelle : $R_g = 1$.

6) Pour tout $x \in]-1, 1[$, soit $G(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = \ln(1-x) \times \dfrac{1}{1-x}$. Ainsi :

$$G(x) = \left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right),$$

en posant $a_0 = 1$ et $a_n = 1/n$ pour tout $n \geqslant 1$, et $b_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comme ces deux dernières séries entières sont de rayon de convergence 1, sur l'intervalle $]-1, 1[$, le produit des sommes est aussi la somme du produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ de ces deux séries entières. Calculons ses coefficients :

$$c_0 = a_0 b_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = h_n.$$

On obtient alors :

$$\forall x \in]-1,1[\,, \quad G(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n = -H(x).$$

7) Soit L l'unique primitive de H sur I qui s'annule en 0.
Fixons $x \in I$ et intégrons le résultat de la question précédente entre 0 et x :

$$\int_0^x H(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^x G(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{donc :}$$

$$L(x) - L(0) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \ln(1-t) \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\ln(1-t)\big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[\frac{1}{2}\Big(\ln(1-t)\Big)^2\right]_0^x = \frac{1}{2}\ln^2(1-x).$$

Conclusion : $\forall x \in I,\ L(x) = \dfrac{1}{2}\ln^2(1-x).$

8) La fonction H est développable en série entière et l'on a :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n\, x^n.$$

Ses primitives sur $\left]-1,1\right[$ sont développables en série entière et se calculent terme à terme ; en particulier pour L :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad L(x) = L(0) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n\,\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h_{n-1}}{n}\,x^n.$$

On a prouvé que la fonction L est développable en série entière.

Remarque. Ne pas dire : « on peut intégrer terme à terme sur l'ouvert de convergence » car c'est imprécis ; il n'est pas possible d'intégrer sur $\left]-R,R\right[$ tout entier. **Dire plutôt :** « on peut intégrer terme à terme **sur un segment** inclus dans l'ouvert de convergence ».

9) Calculons l'expression de $T-S$; pour tout réel x de $\left]-1,1\right[$:

$$T(x) - S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n}\,x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(h_n - \frac{1}{n}\right)x^n.$$

Or : $h_n - \frac{1}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1, \\ h_{n-1} & \text{si } n \geqslant 2, \end{cases}$ donc : $T(x) - S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{h_{n-1}}{n}\,x^n = L(x)$
d'après la question précédente.

Conclusion : $\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad T(x) - S(x) = L(x).$

Exercice 2

1) Question préliminaire
Par l'absurde : supposons que $\cos(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Par le théorème des suites extraites, on aurait également $\cos(2n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Toutefois, on aurait aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos(2n) = 2\cos^2(n) - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\times 0^2 - 1 = -1,$$

donc par unicité de la limite de la suite $\big(\cos(2n)\big)_{n\geqslant 0}$, $0 = -1$: **contradiction.**
Conclusion : La suite $\big(\cos(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n\,x^n$ pour $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$.

2) En $x = 1$, on a : $a_n\,.\,1^n = \dfrac{\cos(n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,
car $\big(\cos(n)\big)_{n\geqslant 1}$ est bornée et n tend vers l'infini.
Par conséquent, $R \geqslant 1$.

3) La suite $\big(\cos(n)\big)_{n\geqslant 0}$ ne tend pas vers 0 d'après **Q1**,
donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\cos(n)$ est grossièrement divergente.

4) On a en vu en **Q2** que $R \geqslant 1$; prouvons que $R \leqslant 1$. Pour cela :

$$R = R\left(\sum_{n\geqslant 1} a_n\,x^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n)}{n}\,x^n\right) = R\left(\sum_{n\geqslant 1} \cos(n)\,x^n\right).$$

Or en $x = 1$, la dernière série entière diverge grossièrement d'après la question précédente. R est donc au plus égal à 1.
Conclusion : $R = 1$.

On note f la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n\,x^n$.

5) Fixons $x \in \mathbb{R}$ quelconque. La série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n}\,x^n = \sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\,x\right)^n$ est une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\,x$: elle converge *si et seulement si* $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\,x\right| < 1$, c.à.d. $|x| < 1$.
Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1, et sa somme s'exprime :

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, \quad S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n}\,x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\,x\right)^n = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\,x}.$$

Remarque.

* Le rayon de convergence appartient toujours à $[0,+\infty]$: c'est un réel positif, ou $+\infty$. **Le rayon de convergence n'est jamais un nombre complexe.**
* Sur cet exemple, on pouvait aussi trouver le rayon de convergence à l'aide de la règle de d'Alembert.

6) • La somme d'une série entière est dérivable terme à terme sur son ouvert de convergence. Ainsi, pour tout réel $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n}\, x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n}\,.\, n\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)\, x^{n-1}.$$

Si l'on suppose de plus $x \neq 0$, on peut écrire :

$$f'(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)\, x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n}\right) x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, n}\, x^n\right) \qquad \text{car } x \in \mathbb{R}, = \frac{1}{x}\left[\mathrm{Re}\big(S(x)\big) - 1\right].$$

• Mettons $S(x)$ sous forme algébrique :

$$S(x) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\, x} = \frac{1}{(1-\cos(1)\,x) - \mathrm{i}\,\sin(1)\,x} = \frac{(1-\cos(1)\,x) + \mathrm{i}\,\sin(1)\,x}{\left|(1-\cos(1)\,x) - \mathrm{i}\,\sin(1)\,x\right|^2} = \frac{(1-\cos(1)\,x) + \mathrm{i}\,\sin(1)\,x}{(1-\cos(1)\,x)^2 + \sin^2(1)\,x^2} = \frac{(1-\cos(1)\,x) + \mathrm{i}\,\sin(1)\,x}{1-2\,\cos(1)\,x + x^2}.$$

• On revient à $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}\left[\mathrm{Re}\big(S(x)\big) - 1\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{1-\cos(1)\,x}{1-2\,\cos(1)\,x + x^2} - 1\right] = \frac{1}{x} \times \frac{\cos(1)\,x - x^2}{1-2\,\cos(1)\,x + x^2} = \frac{\cos(1) - x}{1-2\,\cos(1)\,x + x^2}.$$

• Enfin, on constate que cette formule reste valable pour $x = 0$:

$$f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)\,.\,0^{n-1} = \cos(1) = \frac{\cos(1) - 0}{1-2\,\cos(1)\,.\,0 + 0^2}.$$

Conclusion : Pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \dfrac{\cos(1) - x}{1-2\,\cos(1)\,x + x^2}$.

7) Pour trouver une expression de f, on cherche les primitives de f', qui est une fonction rationnelle. Pour simplifier les écritures, notons $\alpha := \cos(1)$, de sorte que :

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \frac{\alpha - x}{1-2\,\alpha\, x + x^2}.$$

La dérivée du dénominateur est $-2\,\alpha + 2\,x$; on la fait apparaître au numérateur :

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = 0 - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{-2\,\alpha + 2\,t}{1-2\,\alpha\, t + t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[\ln\Big|\underbrace{1-2\,\alpha\, t + t^2}_{>0}\Big|\right]_0^x = -\frac{1}{2}\ln\left(1-2\,\alpha\, x + x^2\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1-2\,\cos(1)\,x + x^2\right).$$

8) Étudions la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n\, x^n := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos^2(n/2)}{n}\, x^n$ et R'' son rayon de convergence.

• En utilisant la formule de linéarisation $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\,\theta)}{2}$, on réécrit la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1} b_n\, x^n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1+\cos(n)}{2\,n}\, x^n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + a_n\right) x^n.$$

La série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n\, x^n$ est combinaison linéaire des séries entières $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n\, x^n$, qui ont toutes les deux un rayon de convergence égal à 1.

Pour cette raison, $R'' \geqslant 1$ et :

$$\forall\, x \in]-1,1[, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + a_n\right) x^n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n\right) = \frac{1}{2}\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n\right) = \frac{1}{2}\left(-\ln(1-x) - \ln\left(1-2\,\cos(1)\,x + x^2\right)\right) = -\frac{1}{2}\ln\Big[(1-x)\left(1-2\,\cos(1)\,x + x^2\right)\Big].$$

- Reste à voir que $R'' = 1$; **par l'absurde,** supposons que $R'' > 1$.
  Le réel 1 se trouverait dans l'ouvert de convergence, donc la somme g de la série entière serait continue en 1. En particulier, la limite de $g(x)$ quand $x \to 1^-$ serait finie. Toutefois :

$$(1-x)\left(1-2\cos(1)\,x+x^2\right) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0^+ \times \left(2-2\cos(1)\right) = 0^+,$$

$$\text{donc} \quad g(x) = -\frac{1}{2}\ln\left[(1-x)\left(1-2\cos(1)\,x+x^2\right)\right] \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty :$$

  il y a une **contradiction,** donc $R'' = 1$.

Conclusion : $\mathrm{R}\left(\sum_{n\geqslant 1} b_n\,x^n\right) = 1$ et :

$$\forall\, x \in\,]-1,1[\,,\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(n/2)}{n}\,x^n = -\frac{1}{2}\ln\left[(1-x)\left(1-2\cos(1)\,x+x^2\right)\right].$$

Problème

d'après INP PC 2024

Racine cubique d'une matrice

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A.

I — Étude d'un exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1) Montrons que A est diagonalisable, et plus précisément qu'elle est semblable à la matrice $D = \mathrm{diag}(1\,;8)$. On a :

$$\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 9X + 8 = (X-1)(X-8).$$

Le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, condition suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
La matrice A est donc semblable à une matrice diagonale dont la diagonale comporte les valeurs propres de A répétées selon leur multiplicité : la matrice D convient.

Conclusion : Il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = P\,D\,P^{-1}$, en notant $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{smallmatrix}\right)$.

2) Soit $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ quelconque.
Posons $\Delta := P^{-1}\,B\,P$, de sorte que $B = P\,\Delta\,P^{-1}$. Ainsi :

B est une racine cubique de A

$$\iff B^3 = A \iff (P\,\Delta\,P^{-1})^3 = P\,D\,P^{-1} \iff P\,\Delta^3\,P^{-1} = P\,D\,P^{-1}$$
$$\overset{(*)}{\iff} \Delta^3 = D \iff \Delta \text{ est une racine cubique de } D.$$

(L'équivalence $\overset{(*)}{\iff}$ se montre, dans le sens direct, en multipliant par P^{-1} à gauche, et par P à droite ; et dans le sens réciproque, en multipliant par P à gauche et par P^{-1} à droite.)

Conclusion : Si $\Delta = P^{-1}\,B\,P$, alors : B est une racine cubique de A *si et seulement si* Δ est une racine cubique de D.

3) Supposons que Δ soit une racine cubique de D.
Alors Δ et D commutent car :

$$\Delta \times D = \Delta \times \Delta^3 = \Delta^4 = \Delta^3 \times \Delta = D \times \Delta.$$

Écrivons $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. L'égalité $\Delta \times D = D \times \Delta$ donne :

$$\begin{pmatrix} a & 8\,b \\ c & 8\,d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 8\,c & 8\,d \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 8\,b = b \\ c = 8\,c \end{cases} \quad \text{d'où} \quad b = c = 0.$$

La matrice Δ est donc elle aussi diagonale.

Conclusion : Si Δ est une racine cubique de D, alors Δ est diagonale.

4)
- **Cherchons les racines cubiques de D.**
  Par analyse-synthèse : si Δ est une racine cubique de D, *nécessairement* Δ est diagonale. *Réciproquement :* prenons $\Delta = \mathrm{diag}(\alpha, \beta) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice diagonale **quelconque.** Alors :

$$\begin{aligned} &\Delta \text{ est racine cubique de } D \\ \iff\ & \Delta^3 = D \iff \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & \beta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\ \iff\ & \begin{cases} \alpha^3 = 1 \\ \beta^3 = 8 \end{cases} \overset{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}{\iff} \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases} \iff \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

  Conclusion : D admet une unique racine cubique $\Delta_1 := \mathrm{diag}(1\,;2)$.

- **On en déduit les racines cubiques de A.**
  D'après **Q2**, les racines cubiques de A s'écrivent $P\,\Delta\,P^{-1}$, où Δ est une racine cubique de D.
  Conclusion : La matrice A admet une unique racine cubique :

$$P\,\Delta_1\,P^{-1} = P\ \mathrm{diag}(1\,;2)\,P^{-1}.$$

II — Dans un plan euclidien

Dans cette partie, on considère un plan euclidien orienté E muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_x, e_y)$.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose :

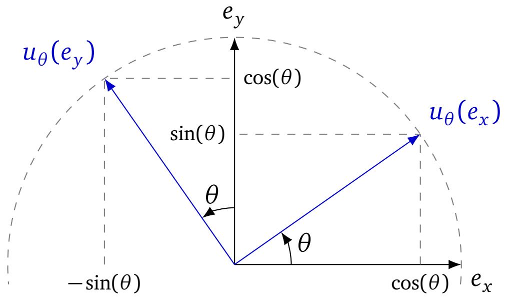
$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On note u_θ et v_θ les endomorphismes de E dont les matrices dans la base $\mathscr{B}$ sont $M(\theta)$ et $N(\theta)$.

5) a. En lisant les colonnes de la matrice $M(\theta)$ de u_θ, on constate que :

$$u_\theta(e_x) = \cos(\theta)\,e_x + \sin(\theta)\,e_y \quad \text{et} \quad u_\theta(e_y) = -\sin(\theta)\,e_x + \cos(\theta)\,e_y.$$

Graphiquement, ces deux vecteurs se représentent ainsi :



L'endomorphisme u_θ fait tourner d'un angle θ autour de l'origine les deux vecteurs de la base orthonormée; **u_θ est la rotation d'angle θ du plan orienté E.**

b. Pour deviner une racine cubique de $M(\theta)$, on utilise le miroir de l'algèbre linéaire. Élever une matrice au cube revient à appliquer 3 fois successivement l'endomorphisme correspondant. À la matrice $M(\theta)$ correspond la rotation d'angle θ ; appliquer 3 fois la rotation d'angle $\theta/3$ revient à effectuer une seule rotation d'angle θ.
On conjecture donc que $M(\theta/3)$ est une racine cubique de $M(\theta)$.

c.
- Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ quelconques. Par le calcul du produit matriciel et grâce aux formules d'addition de trigonométrie :

$$\begin{aligned} M(\theta) \times M(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & -\sin(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta)\cos(\theta') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\ &= M(\theta+\theta'). \end{aligned}$$

- Montrons maintenant que $M(\theta/3)^3 = M(\theta)$:

$$\begin{aligned} M(\theta/3)^3 &= \big(M(\theta/3) \times M(\theta/3)\big) \times M(\theta/3) \\ &= M(2\theta/3) \times M(\theta/3) \\ &= M(2\theta/3 + \theta/3) \\ &= M(\theta). \end{aligned}$$

Conclusion : **$M(\theta/3)$ est bien une racine cubique de $M(\theta)$.**

6) a. Calculons le polynôme caractéristique de $N(\theta)$:

$$\begin{aligned}\chi_{N(\theta)} &= X^2 - \operatorname{tr}\big(N(\theta)\big)\,X + \det\big(N(\theta)\big) = X^2 - 0\,.\,X + \big(-\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)\big)\\ &= X^2 - 1 = (X-1)(X+1).\end{aligned}$$

b.
- La matrice $N(\theta)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ (on peut aussi remarquer que $N(\theta) \in \mathrm{S}_2(\mathbb{R})$).
- Ses valeurs propres sont les racines de $\chi_{N(\theta)}$, soit 1 et -1.
Notons E_1 et E_{-1} ses deux sous-espaces propres (SEP). Comme les valeurs propres sont simples, ce sont des droites vectorielles, et il suffit de trouver un vecteur propre pour chacune des valeurs propres pour connaître ces SEP.
- Pour expliciter E_1, examinons la matrice $N(\theta) - \mathrm{I}_2$:

$$N(\theta) - \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) - 1 & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) - 1. \end{pmatrix}$$

Pour éliminer les 1, on utilise les formules de duplication :

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos(2 \cdot \theta/2) = 2\cos^2(\theta/2) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta/2)\\ \sin(\theta) &= \sin(2 \cdot \theta/2) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2).\end{aligned}$$

En notant $\phi := \theta/2$ pour alléger, on obtient :

$$N(\theta) - \mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} -2\sin^2(\phi) & 2\sin(\phi)\cos(\phi) \\ 2\sin(\phi)\cos(\phi) & -2\cos^2(\phi). \end{pmatrix}$$

Il apparait maintenant que : $\cos(\phi)\,\mathrm{C}_1 + \sin(\phi)\,\mathrm{C}_2 = \binom{0}{0}$.
Le vecteur $V_1 := \binom{\cos(\varphi)}{\sin(\phi)}$ (toujours non nul car de norme 1) **engendre donc E_1.**
- On montre de même que **E_{-1} est engendré par le vecteur $V_2 := \binom{-\sin(\phi)}{\cos(\phi)}$.**

Conclusion : La matrice $N(\theta)$ est diagonalisable, de spectre $\{1\,;-1\}$.
Ses sous-espaces propres E_1 et E_{-1} sont des droites, de bases (V_1) et (V_2) pour les vecteurs $V_1 = \binom{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ et $V_2 = \binom{-\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}$.

c. Les sous-espaces propres E_1 et E_{-1} de v_θ sont supplémentaires dans E.
De plus, les vecteurs de E_1 sont laissés invariants par v_θ, tandis que les vecteurs de E_{-1} sont transformés en leur opposé.
On reconnait la symétrie par rapport à E_1, parallèlement à E_{-1}.
De plus, V_2 étant orthogonal à V_1, on a $E_{-1} \perp E_1$.
Conclusion : L'endomorphisme v_θ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite E_1, engendrée par le vecteur $V_1 = \binom{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$.

d. Puisque v_θ est une symétrie, $v_\theta^2 = \mathrm{id}_E$ et matriciellement, $N(\theta)^2 = \mathrm{I}_2$.
On en déduit que : $N(\theta)^3 = \mathrm{I}_2 \times N(\theta) = N(\theta)$.
Conclusion : La matrice $N(\theta)$ est sa propre racine cubique.

III — Racines cubiques et diagonalisation

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dont les valeurs propres **distinctes** sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{R}$.

Existence d'une racine cubique polynomiale

7) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $H_p(\lambda) := \lambda\,\mathrm{I}_p$.
Tout nombre réel λ admet une racine cubique réelle.
En effet, l'application $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, donc elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\phi(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{-\infty} \phi\,;\lim\limits_{+\infty} \phi\right[= \mathbb{R}$.
λ admet un unique antécédent par ϕ, que l'on note $\sqrt[3]{\lambda}$.
La matrice $R := \sqrt[3]{\lambda}\,\mathrm{I}_p$ est une racine cubique de $H_p(\lambda)$ car :

$$R^3 = \left(\sqrt[3]{\lambda}\,\mathrm{I}_p\right)^3 = \left(\sqrt[3]{\lambda}\right)^3 \mathrm{I}_p = \lambda\,\mathrm{I}_p = H_p(\lambda).$$

Remarque. L'écriture $\lambda^{1/3}$ n'est admise que si λ est un réel positif. Cette notation est définie à l'aide de la fonction exponentielle :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \lambda^{1/3} = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{3}\ln(\lambda)\right) & \text{si } \lambda > 0, \\ 0 & \text{si } \lambda = 0. \end{cases}$$

8) Puisque A est diagonalisable, en notant $p_1, \ldots, p_d$ les ordres de multiplicités de ses valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, la matrice A est semblable à la matrice D, diagonale par blocs, de blocs diagonaux $H_{p_1}(\lambda_1), \ldots, H_{p_d}(\lambda_d)$.
Considérons Δ la matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux $\sqrt[3]{\lambda_1}\,\mathrm{I}_{p_1}, \ldots, \sqrt[3]{\lambda_d}\,\mathrm{I}_{p_d}$. Elle vérifie $\Delta^3 = D$ en calculant les produits par blocs : c'est une racine cubique de D.
Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P\,D\,P^{-1}$. Posons $B := P\,\Delta\,P^{-1}$; alors :

$$B^3 = \left(P\,\Delta\,P^{-1}\right)^3 = P\,\Delta^3\,P^{-1} = P\,D\,P^{-1} = A\,;$$

la matrice B est une racine cubique de A.

Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d} \left(X^3 - \lambda_k\right).$$

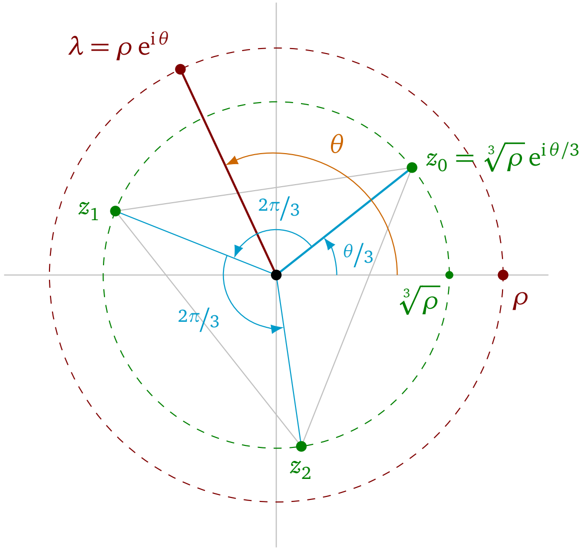
9) La matrice A est inversible, donc 0 n'est pas valeur propre de A.
Les λ_k, qui sont les valeurs propres de A, sont donc tous non nuls.

10) Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous forme exponentielle $\lambda = \rho\, e^{i\theta}$, où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Cherchons ses racines cubiques complexes.
Considérons $z = r\, e^{i\varphi}$, pour $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ quelconques. Alors :

$$z^3 = \lambda \iff \left(r\, e^{i\varphi}\right)^3 = \rho\, e^{i\theta} \iff r^3\, e^{3i\varphi} = \rho\, e^{i\theta}.$$

On identifie modules et arguments :

$$z^3 = \lambda \iff \begin{cases} r^3 = \rho \\ 3\varphi \equiv \theta \ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt[3]{\rho} & (\text{car } r, \rho \in \mathbb{R}_+^*) \\ \varphi \equiv \theta/3 \ [2\pi/3] \end{cases}$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \,/\, z = \sqrt[3]{\rho}\, \exp\left(i\left(\tfrac{\theta}{3} + \tfrac{2k\pi}{3}\right)\right).$$



Dans cette expression, lorsque l'entier k augmente de 3 unités, l'argument augmente de 2π : l'expression est 3-périodique par rapport à k. De plus, les trois solutions pour $k = 0, 1, 2$ sont distinctes car leurs arguments ne sont pas congrus modulo 2π.

Conclusion : Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, l'équation $z^3 = \lambda$ admet exactement 3 solutions distinctes.

11) Pour chaque $\lambda_k \in \mathbb{R}^*$, notons α_k, β_k et γ_k ses 3 racines complexes distinctes. Alors :

$$\forall k \in [\![1, d]\!], \quad X^3 - \lambda_k = (X - \alpha_k)(X - \beta_k)(X - \gamma_k)$$
$$\text{d'où :} \qquad Q(X) = \prod_{k=1}^{d} (X - \alpha_k)(X - \beta_k)(X - \gamma_k).$$

Les racines complexes de ce polynôme sont les $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$, pour $k \in [\![1, d]\!]$.
Remarquons qu'elles sont toutes distinctes ; prenons deux racines du polynôme Q :

- si elles correspondent au même indice $k \in [\![1, d]\!]$ fixé, ce sont deux racines distinctes complexes de λ_k ;
- si elle correspondent à deux indices k et k' différents, leurs cubes respectifs, λ_k et $\lambda_{k'}$, sont différents, donc les deux racines ne peuvent pas être égales.

Conclusion : Le polynôme $Q(X)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

12) Supposons que B soit une racine cubique de A : $B^3 = A$.
Comme A est diagonalisable et que ses valeurs propres distinctes sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$, elle admet comme polynôme annulateur :

$$Z(X) := \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k).$$

On en déduit que Q est un polynôme annulateur de B :

$$Q(B) = \prod_{k=1}^{d} (B^3 - \lambda_k I_n) = \prod_{k=1}^{d} (A - \lambda_k I_n) = Z(A) = 0_n.$$

Puisque Q est un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, on en déduit que B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Conclusion : Si A est une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et inversible, ses racines cubiques B sont nécessairement diagonalisables sur $\mathbb{C}$.