

## Régulation d'un système de climatisation à débit d'air variable

**Q1.** Pour améliorer la consommation énergétique d'un bâtiment, on peut :

- Améliorer son isolation thermique ;
- L'équiper de systèmes de production d'énergie renouvelable (panneaux photovoltaïques, panneaux solaires thermiques pour chauffer l'eau, éolienne, etc) ;
- Rendre plus performant son système de chauffage, par exemple en utilisant une pompe à chaleur (géothermie, aérothermie).

**Q2.** Il est nécessaire de renouveler constamment l'air intérieur d'un bâtiment pour :

- Evacuer l'humidité ;
- Lutter contre les acariens ;
- Permettre aux habitants de respirer de l'air sain.

**Q3.** L'échangeur thermique a pour rôle de minimiser les pertes énergétiques dues au renouvellement de l'air : en saison froide, l'air frais venant de dehors est réchauffé au contact de l'air chaud expulsé à l'extérieur ; ainsi, l'air rentre dans le bâtiment un peu moins froid ; en saison chaude, on refroidit l'air venant de dehors par échange thermique avec celui sortant. C'est ce que l'on appelle la « VMC double flux ».

**Q4.** Contrôler le débit d'air conditionné dans chaque pièce présente plusieurs avantages :

- On ne rafraîchit que les pièces occupées ;
- Chaque utilisateur peut adapter la climatisation à ses besoins ;
- Selon leur exposition au soleil, la taille de leurs vitrages, les différentes pièces n'ont pas les mêmes besoins en termes de climatisation.

### Partie III - Étude des principaux échanges thermiques

#### III.1 - Puissance thermique dégagée par les personnes présentes dans la pièce

**Q5.** Pour une personne, on peut lire les différents niveaux de puissance, en W : 38 ; 47 ; 76 et 123. Les différents pourcentages de la puissance dégagée par chacun des quatre modes de transfert thermique sont :

- Rayonnement :  $\frac{38}{123} = 31 \%$
- Conduction :  $\frac{47-38}{123} = 7 \%$
- Convection :  $\frac{76-47}{123} = 24 \%$
- Evapo-transpiration :  $\frac{123-76}{123} = 38 \%$ .

**Q6.** Puissance totale dégagée par 4 personnes présentes dans la pièce :  $P_{pers} = 4 \times 0,123 = 0,49 \text{ kW}$ .

#### III.2 - Puissance thermique extraite par le climatiseur

**Q7.** Lorsque toutes les pièces sont maintenues à la température  $T = 25 \text{ °C}$ , la puissance thermique maximale extraite du bâtiment par le climatiseur est :

$$\dot{Q}_{clim max} = D_{m max} c_p (T - T_c) = \frac{25 \cdot 10^3}{3600} \times 1,0 \cdot 10^3 \times (25 - 20) = 35 \text{ kW}.$$

**Q8.** L'efficacité est le rapport de la puissance thermique extraite sur la puissance mécanique consommée, par la machine. Si cette dernière est considérée égale à la puissance électrique consommée, on a :

$$e_{max} = \frac{\wp_{clim max}}{\wp_{méca}} = \frac{\wp_{clim max}}{\wp_{élec max}}, \text{ d'où la puissance électrique maximale consommée par le climatiseur :}$$

$$\wp_{élec max} = \frac{\wp_{clim max}}{T_c} (T_e - T_c) = 0,95 \text{ kW}. \text{ Attention, le } T_c \text{ du dénominateur doit être en Kelvin.}$$

**Q9.** En pratique la puissance électrique consommée peut dépasser la valeur calculée à la **Q8**, tout simplement parce que :

- D'une part, l'efficacité réelle de la machine thermique sera inférieure à celle de Carnot ;
- D'autre part, le rendement du moteur électrique qui entraîne le compresseur du climatiseur ne sera pas de 100%.

### III.3 - Puissance thermique apportée par le renouvellement de l'air

**Q10.** En appliquant le premier principe industriel à l'air en écoulement dans la pièce, en négligeant les variations d'énergie cinétique et potentielle macroscopiques,

$$d_m (h_{sortie} - h_{entrée}) = \wp_{méca utile} + \wp_{th pièce \rightarrow air}$$

Et comme il n'y a pas de pièces mécaniques mobiles dans la pièce, et en remplaçant l'enthalpie massique par son expression, il vient :

$$d_m c_p (T - T_{e/p}) = \wp_{th pièce \rightarrow air} = -P_{ren},$$

ce qui donne bien la formule proposée pour  $P_{ren}$ .

**Q11.** En appliquant le premier principe industriel pour l'écoulement dans le flux sortant entre les abscisses  $x$  et  $x+dx$ ,

$$\frac{d_m}{N} c_p (T_{FS}(x) - T_{FS}(x + dx)) = d\wp_{th entrant \rightarrow sortant}$$

$$\text{Et } d\wp_{th entrant \rightarrow sortant} = 2K_{th} dx (T_{FE}(x) - T_{FS}(x))$$

$$\text{D'où } \frac{d_m}{N} c_p (T_{FS}(x) - T_{FS}(x + dx)) = 2K_{th} dx (T_{FE}(x) - T_{FS}(x))$$

$$\text{Puis } \frac{dT_{FS}}{dx}(x) = -\frac{2NK_{th}}{d_m c_p} (T_{FE}(x) - T_{FS}(x)),$$

$$\text{ce qui est bien de la forme } \frac{dT_{FS}}{dx}(x) = -\frac{T_{FE}(x) - T_{FS}(x)}{\lambda} \quad (4), \quad \text{avec } \lambda = \frac{d_m c_p}{2NK_{th}}.$$

**Q12.** On obtiendrait, de même, l'équation différentielle (5), en appliquant le premier principe à l'écoulement dans le flux entrant entre les abscisses  $x$  et  $x+dx$ .

**Q13.** En faisant (4) – (5), on obtient  $\frac{dT_{FS}}{dx}(x) = \frac{dT_{FE}}{dx}(x)$ , donc  $T_{FE}(x) - T_{FS}(x) = Cte$ .

Et on trouve cette constante en se plaçant en  $x = x_{max}$ , donc à l'intérieur de la pièce, ce qui donne bien  $T_{FE}(x) - T_{FS}(x) = T_{e/p} - T$ .

**Q14.** En remplaçant dans (5)  $T_{FE}(x) - T_{FS}(x)$  par  $T_{e/p} - T$ , on obtient  $\frac{dT_{FE}}{dx}(x) = -\frac{T_{e/p} - T}{\lambda}$ , qui

$$\text{s'intègre en : } T_{FE}(x) = \frac{2NK_{th}}{d_m c_p} (T - T_{e/p}) x + T_{FE}(0), \text{ c'est-à-dire } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;"> $T_{FE}(x) = \frac{2NK_{th}}{d_m c_p} (T - T_{e/p}) x + T_e$ .$$

**Q15.** Sachant que  $T_{FE}(L) = T_{e/p}$ , la relation obtenue à la question précédente donne :

$$T_{e/p} = \frac{2NK_{th}}{d_m c_p} (T - T_{e/p}) L + T_e, \text{ d'où } T_{e/p} - T = \frac{2NK_{th}}{d_m c_p} (T - T_{e/p}) L + T_e - T,$$

$$\text{puis } (T_{e/p} - T) \left(1 + \frac{2NK_{th}L}{d_m c_p}\right) = T_e - T.$$

Or, l'équation (3) de l'énoncé donne  $P_{ren} = d_m c_p (T_{e/p} - T)$  ; en remplaçant la parenthèse par l'expression trouvée ci-dessus, on trouve bien que la puissance thermique apportée par le renouvellement de l'air s'écrit :

$$P_{ren} = \frac{d_m c_p}{1 + \frac{2NK_{th}L}{d_m c_p}} (T_e - T) \quad (6)$$

avec  $L$  la longueur de l'échangeur.

L'échangeur est bien équivalent à une résistance thermique  $R_{th} = \frac{1 + \frac{2NK_{th}L}{d_m c_p}}{d_m c_p}$ .

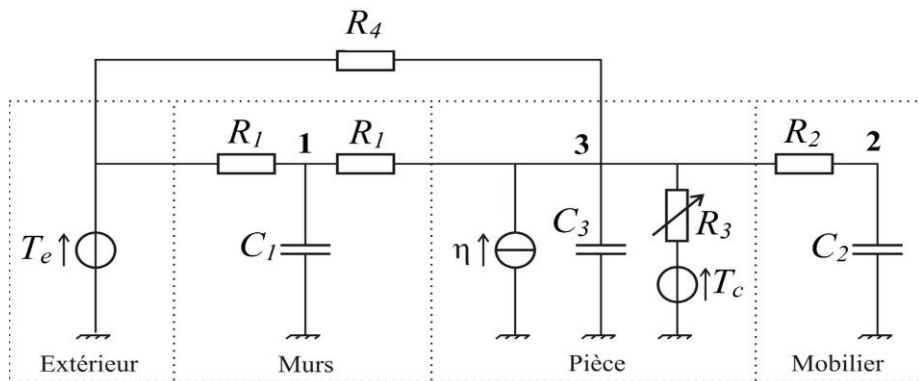
**Q16.** On voit dans cette formule que plus  $N$  est grand, plus la puissance thermique apportée par le renouvellement de l'air est faible, donc il est moins nécessaire de réfrigérer la pièce.

Pour un volume occupé par l'échangeur donné, la caractéristique physique de l'air, non mentionnée dans l'étude précédente, qui constitue un frein à l'augmentation excessive de  $N$  est sa viscosité.

Du fait de celle-ci, il existe des pertes de charge, donc la puissance mécanique nécessaire pour créer l'écoulement est plus importante, ce qui engendre un surcoût de fonctionnement.

## Partie IV - Influence du débit d'air conditionné sur la température

### IV.1 - Schéma électrique équivalent de la pièce



**Figure 4** - Schéma électrique équivalent de la pièce

**Q17.** L'échangeur et la fenêtre correspondent à des résistances thermiques en parallèle, car les deux sont soumis à la même différence de température,  $T_e - T$ .

On a donc  $R_4 = \frac{R_{échangeur} \times R_{fenêtre}}{R_{échangeur} + R_{fenêtre}}$ .

**Q18.** La source de courant  $\eta$  correspond à la puissance thermique apportée à la pièce par les quatre personnes :  $\eta = P_{pers}$ .

**Q19.** En écrivant la relation (2) pour une seule pièce du bâtiment, on a :  $P_{clim} = D_m c_p (T - T_c)$ , d'où  $T - T_c = \frac{1}{D_m c_p} P_{clim}$ , et donc  $R_3 = \frac{1}{D_m c_p}$ .

$D_m$  représente le débit massique d'air conditionné circulant dans une pièce (cf énoncé au début du IV),

$P_{clim}$  représente la puissance thermique fournie par la pièce à l'air conditionné ; elle est bien positive.

Comme dit juste après la question Q3, le débit d'air conditionné  $D_m$  injecté dans chaque pièce est contrôlé par des registres à volets, donc la résistance  $R_3$  est bien variable, selon la position du volet.

**Q20.** On applique la loi des nœuds :

- Au point 1 :  $\frac{T_e - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T}{R_1} + C_1 \frac{dT_1}{dt}$
- Au point 2 :  $\frac{T - T_2}{R_2} = C_2 \frac{dT_2}{dt}$
- Au point 3 :  $\eta = \frac{T - T_1}{R_1} + \frac{T - T_e}{R_4} + \frac{T - T_c}{R_3} + \frac{T - T_2}{R_2} + C_3 \frac{dT}{dt}$

**Q21.** On peut mettre tout cela sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{dT_1}{dt} \\ \frac{dT_2}{dt} \\ \frac{dT}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{R_1 C_1} & 0 & \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_3} & \frac{1}{R_2 C_3} & -\frac{1}{C_3} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_4 C_3} & \frac{1}{R_3 C_3} & \frac{1}{C_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_e \\ T_c \\ \eta \end{pmatrix},$$

ce qui est bien de la forme  $\dot{X} = A X + B U$  (7), avec

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2}{R_1 C_1} & 0 & \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \\ \frac{1}{R_1 C_3} & \frac{1}{R_2 C_3} & -\frac{1}{C_3} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_4 C_3} & \frac{1}{R_3 C_3} & \frac{1}{C_3} \end{pmatrix}.$$

## IV.2 - Résolution numérique

**Q22** Puisque les températures interviennent uniquement dans des différences ou dans des dérivées, on peut les exprimer aussi bien en °C qu'en K. Et comme en Q25 on nous impose des °C, faisons-le dès maintenant : `U=np.array([[28],[20],[500]])`

**Q23.** Toujours avec des températures en °C : `X=np.array([[28],[28],[28]])`

**Q24.**  $X(t_{k+1}) = X(t_k) + \dot{X}(t_k) \cdot \Delta t$  d'où  $X(t_{k+1}) = X(t_k) + [AX(t_k) + BU] \times \Delta t$

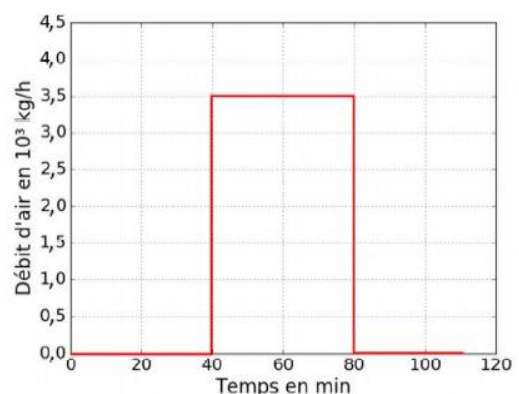
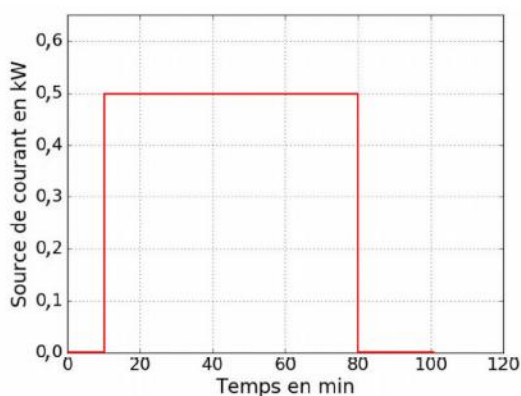
pour que cette approximation soit justifiée, il faut que  $\Delta t$  soit suffisamment faible devant le temps caractéristique de la variation de température.

**Q25.**

```
t.append(i*dt/60)
X = X + (np.dot(A,X)+np.dot(B,U))*dt
T.append(X[2][0])
```

Ou `X[2,0]`

**Q26.**



**Q27.** On est dans le cas de la réponse d'un système à un échelon (réponse indicielle) déclenché à  $t = 40$  min.

La réponse temporelle :

Ne présente pas de dépassement

Présente une tangente oblique à  $t = 40$  min

Présente une valeur constante en régime établi

On peut assimiler la réponse à celle d'un 1<sup>er</sup> ordre.

**Q28.** Le gain statique  $H_0$  est donné par  $\frac{\text{amplitude la sortie}}{\text{amplitude de l'échelon}}$

$$H_0 = \frac{22,7 - 29,2}{3,5 \cdot 10^{-3}} = -6,7 K \cdot s \cdot k_g^{-1}$$

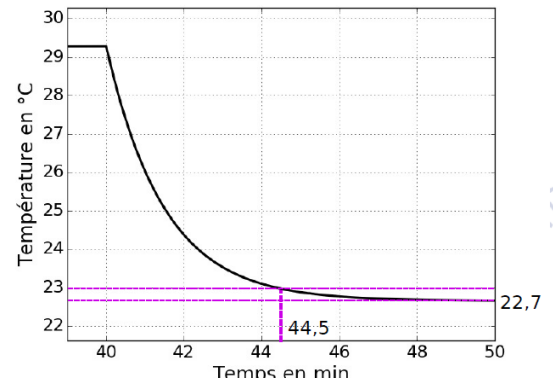
On peut utiliser le  $t_{r5\%}$  pour déterminer la constante de temps car pour un système du 1<sup>er</sup> ordre la constante de temps  $\tau$  vaut environ  $\frac{t_{r5\%}}{3}$ .

On relève le temps  $t_1$  qui correspond à l'instant pour lequel la réponse vaut :  $\frac{95}{100} (22,7 - 29,2) + 29,2 = 23^\circ C$

On obtient  $t_1 = 44,5$  minutes

On en déduit le temps de réponse à 5% de  $44,5 - 40 = 4,5$  minutes = 270s

La constante de temps vaut donc : 90s. On a donc  $H(p) = \frac{-6,7}{1+90p}$



**Q29.** Pour 70 Pa, on relève les caractéristiques suivantes sur la figure 7

Débit en m <sup>3</sup> /h	500	600	830	1100
Angles en °	60	45	30	15

On obtient  $K_r = -13,5 \text{ m}^3/(\text{h} \cdot ^\circ)$

Et  $D = 12,7 \text{ m}^3/\text{h}$

**Q30.**

Le mécanisme comporte 6 solides et 7 liaisons. Le nombre cyclomatique vaut donc :  $\gamma = l - n + 1 = 7 - 6 + 1 = 2$

On a donc  $E_c = 12$

Le mécanisme comporte 7 liaisons pivot :

$$n_c = 7$$

Il y a uniquement une loi entrée / sortie donc  $m_c = 1$

On en déduit  $h = E_c + m_c - n_c = 12 + 1 - 7 = 6$

Le mécanisme ainsi modélisé est hyperstatique de degré 6.

**Q31.** On remplace les liaisons en C, B, G et F par des liaisons sphériques.

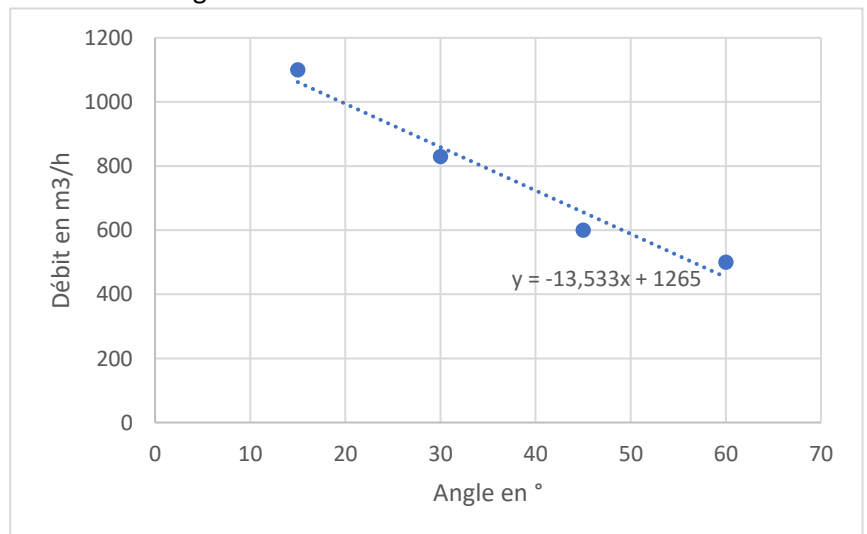
On a toujours  $\gamma = 2$  et  $E_c = 12$ .

Le mécanisme comporte maintenant 4 liaisons sphérique et 3 liaisons pivot donc  $n_c = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 15$

On a toujours la loi entrée / sortie mais on rajoute 2 mobilités internes : rotation de 4 autour de (BC) et rotation de 5 autour de (GF)

On en déduit  $h = E_c + m_c - n_c = 12 + 3 - 15 = 0$

Le mécanisme ainsi modélisé est isostatique.



**Q32.**  $K_T$  doit en être en  $V/^\circ$

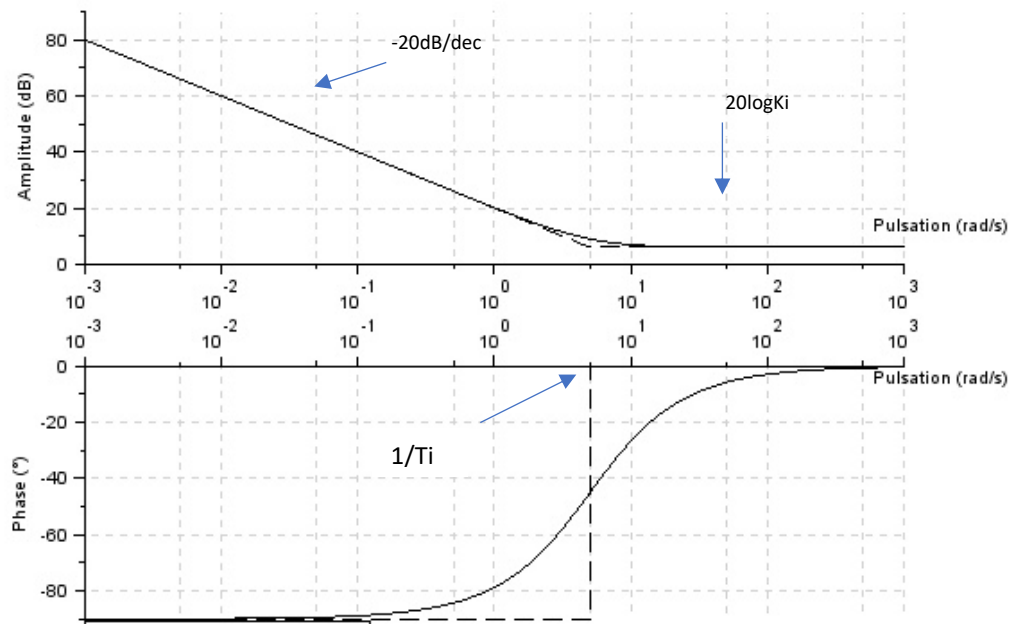
**Q33** Pour déterminer  $K_a$  le gain de l'adaptateur, on fait l'hypothèse que si  $T(p) = T_{\text{cons}}(p)$  alors l'écart  $\varepsilon$  doit être nul. On obtient directement  $K_a = K_T$

**Q34.** Le correcteur peut se mettre sous la forme :

$$H_c(p) = K_i \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) = K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p}$$

C'est le produit d'un intégrateur de gain  $\frac{K_i}{T_i}$  et de l'inverse d'un 1<sup>er</sup> ordre de gain unitaire et de constante de temps  $T_i$

Remarque : on verra un peu plus tard que c'est un correcteur proportionnel-intégral (PI)



**Q35.** La fonction de transfert en boucle ouverte est :  $FTBO(p) = K_i \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) K_m K_v K_R \frac{H_0}{1 + \tau p} K_T$

$$FTBO(p) = K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p} K_m K_v K_R \frac{H_0}{1 + \tau p} K_T \quad \boxed{FTBO(p) = \frac{\frac{K_i}{T_i} K_m K_v K_R K_T H_0 (1 + T_i p)}{p(1 + \tau p)}}$$

Ordre : 2, classe : 1, gain :  $\frac{K_i}{T_i} K_m K_v K_R K_T H_0$

**Q36.** La fonction de transfert en boucle fermée (sans les perturbations) est :

$$FTBF(p) = K_a \frac{\frac{FTBO_{\text{corrigée}}(p)}{K_t}}{1 + \frac{FTBO_{\text{corrigée}}(p)}{K_t} K_t} = K_a \frac{\frac{K_{BO}}{p \cdot K_t}}{1 + \frac{K_{BO}}{p}} = K_a \frac{\frac{K_{BO}}{K_t}}{p + K_{BO}} = \frac{\frac{K_a}{K_t}}{1 + \frac{p}{K_{BO}}}$$

Avec  $K_a = K_T$  (question 33)  $\boxed{FTBF(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{BO}}}}$

Fonction de transfert d'ordre 1, de constante de temps  $\frac{1}{K_{BO}}$  (en seconde) et de gain statique unitaire (sans unité ici)

**Q37** On relève le temps pour lequel la réponse vaut 1,05.  $(24 - 28) + 28 = 23.8^\circ C$

On en déduit un temps de réponse à 5% d'environ 1900s < 3000s

L'exigence de rapidité est respectée

On mesure un 1<sup>er</sup> dépassement de  $\frac{1,2}{4} \cdot 100 = 30\% < 35\%$

L'exigence d'amortissement est respectée

La valeur finale est de  $24^\circ$ , il n'y a pas d'erreur statique

L'exigence sur la précision est respectée