4.7.1 Euler-Exercice 2

Sous l'effet d'une baisse de pression brutale, des bulles de gaz peuvent se former dans l'eau : ce phénomène appelé cavitation est particulièrement important au voisinage des hélices de navires. Il a des effets néfastes car l'implosion des bulles de gaz équivaut à de multiples impacts sur les hélices, provoquant leur usure.
Le but de l'exercice est l'étude de l'implosion d'une bulle.

A l'instant $t = 0$ on crée dans un fluide une cavité de rayon R_0. Le fluide, de masse volumique ρ, est en écoulement parfait incompressible. La pression à l'infini vaut P_0 et les forces de pesanteur sont négligées.
On cherche à déterminer le temps τ au bout duquel la cavité aura disparu.
A l'instant $t > 0$ le champ des vitesses est donné par : $\vec{v}(M,t) = v(r,t)\vec{u}_r$ et le rayon de la cavité est $R(t)$.

a-Prévoir qualitativement les variations de τ en fonction de R_0 , ρ et P_0.

b-Justifier que le mouvement du fluide est potentiel.

c-Ecrire une relation entre r, v, R et dR/dt traduisant la conservation de la masse.

d-Ecrire l'équation d'Euler. En prenant une pression nulle à l'intérieur de la cavité, établir une équation différentielle en R(t) par intégration de l'équation d'Euler.

e-On montre qu'une nouvelle intégration conduit à : $\dfrac{dR}{dt} = -\sqrt{\dfrac{2P_0}{3\rho}}\sqrt{\left(\dfrac{R_0}{R}\right)^3 - 1}$. En déduire τ.

A.N : calculer τ avec $R_0 = 1\text{mm}$, $\rho = 10^3\ \text{kg/m}^3$, $P_0 = 10^5$ Pa et de $I = \int_0^1 \sqrt{x^3/(1-x^3)}\,dx \approx 1{,}29$

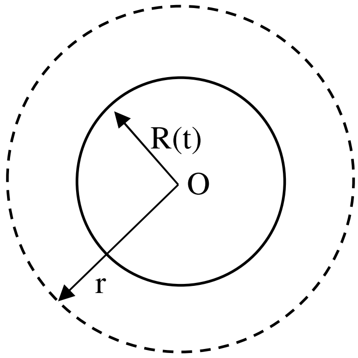
4.7.1 Euler-Exercice 2

---

a-Plus le rayon initial de la bulle est grand, plus τ est grand.
Plus la pression du liquide sur la bulle est grande, plus τ est petit.
Plus la masse volumique du liquide est grande, plus celui-ci est inerte donc plus τ est grand.

b-La seul dérivée spatiale non nulle du champ de vitesse est $\dfrac{\partial v_r}{\partial r}$.

Or le rotationnel du champ de vitesse ne contient que des dérivées croisées (dérivée d'une composante selon un axe par rapport à la coordonnée selon un autre axe). Donc <u>le rotationnel du champ de vitesse est nul.</u>
L'écoulement est potentiel.



c-Débit volumique sortant à travers la sphère de rayon r :

$$q_v = \iint_{\text{sphère}} v(r,t)\vec{u}_r.dS\vec{u}_r = 4\pi r^2.v(r,t)$$

Ecoulement incompressible : q_v = cste quel que soit r

Donc : $4\pi r^2.v(r,t) = 4\pi R^2(t).v(R(t),t) = 4\pi R^2(t).\dfrac{dR}{dt}(t)$

D'où : $\boxed{v(r,t) = \dfrac{R^2(t)}{r^2}\dfrac{dR}{dt}(t)}$

d- $\rho\left[\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}}\dfrac{v^2}{2} + (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v})\wedge\vec{v}\right] = -\overrightarrow{\text{grad}}P$ (pesanteur négligée)

En projection selon $\vec{u}_r$ et sachant que l'écoulement est irrotationnel : $\boxed{\rho\left[\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v^2}{2}\right)\right] = -\dfrac{\partial P}{\partial r}}$

On calcule d'après la question c- : $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{R^2}{r^2}\dfrac{d^2R}{dt^2} + \dfrac{2R}{r^2}\left(\dfrac{dR}{dt}\right)^2$ et $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v^2}{2}\right) = -2\dfrac{R^4}{r^5}\left(\dfrac{dR}{dt}\right)^2$

Donc : $\rho\left[\dfrac{R^2}{r^2}\dfrac{d^2R}{dt^2} + \dfrac{2R}{r^2}\left(\dfrac{dR}{dt}\right)^2 - 2\dfrac{R^4}{r^5}\left(\dfrac{dR}{dt}\right)^2\right] = -\dfrac{\partial P}{\partial r}$

A t fixé, on intègre pour r variant de R(t) à l'infini et P variant de 0 à P_0 :

$$\rho\left[R^2\frac{d^2R}{dt^2}\int_R^{+\infty}\frac{dr}{r^2} + 2R\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\int_R^{+\infty}\frac{dr}{r^2} - 2R^4\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\int_R^{+\infty}\frac{dr}{r^5}\right] = -\int_0^{P_0}\frac{\partial P}{\partial r}dr$$

D'où l'équation différentielle : $\boxed{\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{dR}{dt}\right)^2 + R\dfrac{d^2R}{dt^2} + \dfrac{P_0}{\rho} = 0}$

e-On a : $\dfrac{dR}{dt} = -\sqrt{\dfrac{2P_0}{3\rho}}\sqrt{\left(\dfrac{R_0}{R}\right)^3 - 1}$ Séparation des variables : $-\sqrt{\dfrac{3\rho}{2P_0}}\dfrac{dR}{\sqrt{\left(\dfrac{R_0}{R}\right)^3 - 1}} = dt$

On pose : $x = \dfrac{R}{R_0}$ d'où : $-\sqrt{\dfrac{3\rho}{2P_0}}\dfrac{R_0 dx}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{x}\right)^3 - 1}} = dt$

puis on intègre pour x variant de 1 (à t =0) à 0 (à t = τ) : $-R_0\sqrt{\dfrac{3\rho}{2P_0}}\displaystyle\int_1^0\sqrt{\frac{x^3}{1-x^3}}dx = \int_0^\tau dt$

Donc : $\boxed{\tau = R_0\sqrt{\dfrac{3\rho}{2P_0}}I}$ A.N : <u>$\tau = 1{,}6.10^{-4}$ s</u>
