INTÉGRATION

Exercices

1 Étudier la nature des intégrales suivantes. Lorsque cela a un sens, on précisera leur valeur. Pour les intégrales 10 à 13, on pourra faire un changement de variable (parfois proposé entre parenthèses).

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$; 2. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$; 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 e^{1/t}}\,\mathrm{d}t$; 4. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tan t\,\mathrm{d}t$; 5. $\displaystyle\int_\pi^{+\infty}\left(2i-\frac{1}{x^2}\right)e^{ix^2}\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\lfloor x\rfloor}$; 7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$; 8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$; 9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$; 10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$; 12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ $\left(u = x-\frac{1}{x}\right)$; 13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\left(u=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

---

2 Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes (α est un paramètre réel).

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{t}\ln t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+(t\ln t)^2}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\frac{1}{t})e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \;;\; \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{x^\alpha}\right)\mathrm{d}x$$

---

3 *Intégrales de Bertrand*

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Montrer les équivalences suivantes :

$$\left[\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}\mathrm{d}x \text{ converge}\right] \Longleftrightarrow [(\alpha>1) \text{ ou } (\alpha=1 \text{ et } \beta>1)].$$

$$\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^\alpha(-\ln x)^\beta}\mathrm{d}x \text{ converge}\right] \Longleftrightarrow [(\alpha<1) \text{ ou } (\alpha=1 \text{ et } \beta>1)].$$

---

4 Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$

---

5 Soit $f : t\mapsto \ln(\sin t)$ et $g : t\mapsto \ln(\cos t)$.

1. Montrer que f et g sont intégrables sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

   On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\mathrm{d}t$.
2. Montrer que $I=J$ et calculer $I+J$.
3. En déduire la valeur de I et J.

6 *Étude de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :
$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\mathrm{d}t.$$
   (a) Justifier que I_n et J_n sont bien définis pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+1} - I_n = 0$. En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Soit $\varphi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
   Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = 0$.
   (d) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (J_n - I_n) = 0$.
   (e) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = I$.
   (f) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_\pi^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\mathrm{d}t$.
   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

---

7 Pour $x > 0$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction F est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. Établir que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.
3. À l'aide d'encadrements, montrer que :
$$\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} xF(x) = 0.$$
4. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$.
5. À l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de $F(x)$.

---

8 *Fonction Gamma d'Euler*

On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction Γ a pour ensemble de définition $]0, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

9 *Sommes de Riemann*

Soit f une fonction positive, continue et décroissante de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si et seulement si la suite (S_n) converge et dans ce cas, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f$.

10 Calculer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin^n x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \text{ où } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\quad ; \quad \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{n+2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt + t^3}\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \quad ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{n f(t)}{1 + n^2 t^2}\,\mathrm{d}t \text{ où } f \text{ est continue et bornée sur } \mathbb{R}_+$$

---

11 Établir les égalités suivantes.

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n (1 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)} \quad ; \quad \int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1} \quad ; \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 + x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1}$$

---

12 Montrer que les fonctions suivantes sont continues puis de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + tx}\,\mathrm{d}t \ , \ I = [0, +\infty[\quad ; \quad g(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x \sin^2 t)\,\mathrm{d}t \ , \ I = [0, +\infty[$$

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t \ , \ I =]0, +\infty[\quad \textit{(on pourra faire un changement de variable)}$$

---

13 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x + t^2)^n}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que I_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer I_n' en fonction de I_{n+1}.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $x > 0$, on a $I_n(x) = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{(n-1)! 2^{n-1}} x^{-\frac{2n-1}{2}}$.

---

14 *Intégrale de Gauss*

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et exprimer f'.
2. Calculer $f(0)$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
3. On note g l'application définie par $g(x) = f(x^2)$.
   Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g(x) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

---

15 On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que l'on définit une fonction φ paire et continue sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)\,\mathrm{d}t.$$

2. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et déterminer une expression à l'aide d'une intégrale de $\varphi'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

3. Déterminer une constante α telle que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on ait :

$$\varphi'(x) = \alpha\varphi(x).$$

4. Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$ puis pour $x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{16}$ *Fonction Gamma d'Euler (suite de l'exercice 8)*
On pose $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. (a) Soit $t > 0$, soit $(a,b) \in \mathbb{R}$ avec $b > a > 0$. Montrer que $\forall x \in [a,b]$, $t^{x-1} \leqslant t^{a-1} + t^{b-1}$.
   (b) Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et donner une expression intégrale de $\Gamma^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Déterminer les variations de Γ' et montrer que Γ' s'annule en un unique réel ξ dont on déterminera la partie entière.
   En déduire les variations de Γ.

2. Étudier les limites de Γ en 0 et en $+\infty$.

3. Soit $x > 0$.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$
   On pourra utiliser une intégration par parties.
   (b) En déduire que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

$\boxed{17}$ *Transformée de Laplace*
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs réelles.
Si x est un réel pour lequel l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ converge alors on note :

$$L_f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge.

1. On suppose dans cette question seulement que $t \mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
   Montrer que L_f est bien définie et continue sur $[\alpha,+\infty[$.

2. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on note $G(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)e^{-\alpha s}\,\mathrm{d}s$.
   (a) Montrer que G est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $x \in]\alpha,+\infty[$, $L_f(x)$ existe et on a :
   $$L_f(x) = (x-\alpha)\int_0^{+\infty} G(t)e^{-(x-\alpha)t}\,\mathrm{d}t.$$
   (c) En déduire que L_f est continue sur $]\alpha,+\infty[$.