

I. A Pesanteur et pression en altitude

1. En confondant champ de pesanteur et champ gravitationnel, on a :  $g = G \frac{M_T}{r^2}$

La variation relative de  $g$  entre le sol ( $r = R_T$ ) et l'altitude maximale ( $r = R_T + h$ )

$$\frac{g(R_T) - g(R_T + h)}{g(R_T)} = \frac{G \frac{M_T}{R_T^2} - G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}}{G \frac{M_T}{R_T^2}} = 1 - \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} = 1 - \left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^{-2} = 1 - \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$$

La variation relative de champ de pesanteur est :  $\frac{2h}{R_T}$  A.N. :  $\frac{2h}{R_T} = 0,44 < 0,5\%$

2. Equation de la statique des fluides dans R galiléen :  $\vec{\sigma}' = \rho \vec{g} - \text{grad} P$

En projection selon  $Oz$  :  $\frac{dP}{dz}(z) = -\rho(z)g$

Equation d'état du gaz parfait  $\Rightarrow \rho = \frac{M_{\text{air}} P}{RT}$

$$\text{Donc : } \frac{dP}{dz}(z) = -\frac{M_{\text{air}} g P(z)}{RT_0(1-\Gamma z)}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{1}{1-\Gamma z} \frac{M_{\text{air}} g}{RT_0} dz \quad \boxed{H_1 = \frac{1}{\Gamma}} \quad \boxed{H_0 = \frac{RT_0}{M_{\text{air}} g}}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{H_1 = 46 \text{ km}} \quad \left( \Gamma = \frac{1}{h} \left(1 - \frac{T_h}{T_0}\right) \text{ car } T_h = T_0(1 - \Gamma h) \right)$$

$$\boxed{H_0 = 8,8 \text{ km}}$$

3. On intègre :  $\ln P = \frac{H_1}{H_0} \ln \left(1 - \frac{z}{H_1}\right) + K$  Pour  $z=0$  :  $\ln P_0 = K$

$$\text{Donc : } \ln \frac{P}{P_0} = \frac{H_1}{H_0} \ln \left(1 - \frac{z}{H_1}\right)$$

$$\text{Soit : } P = P_0 \left(1 - \frac{z}{H_1}\right)^{h_2} \quad \text{avec : } \boxed{h_2 = \frac{H_1}{H_0}}$$

$$\text{A.N. : } P(h) = 0,15 P_0$$

I. B Stabilité d'une atmosphère sans vent

4.  $\vec{F} = \vec{F}_{\text{pesanteur}} + \vec{F}_{\text{pression}}$  (poussée d'Archimède)

$$= -\rho_s(z) V g \vec{u}_z + \rho_{\text{air}}(z) V g \vec{u}_z$$

$$\text{Donc : } \boxed{\vec{F} = (\rho_{\text{air}}(z) - \rho_s(z)) V g \vec{u}_z}$$

5. Principe fondamental de la dynamique à  $V$ , selon  $Oz$  :  $\rho_s(z) V \ddot{z}(t) = (\rho_{\text{air}}(z) - \rho_s(z)) V g$

$$\text{Donc : } \boxed{\rho_s(z) \ddot{z}(t) + (\rho_s(z) - \rho_{\text{air}}(z)) g = 0}$$

Air plus froid  $\Rightarrow$  air plus dense  $\Rightarrow \rho_s(z) > \rho_{\text{air}}(z)$

Le volume  $V$  va redescendre. L'atmosphère est stable.

$$6. \text{ On a: } p_s(z) = p_s(z_0) + \left. \frac{dp}{dz} \right|_s (z - z_0) = p_{\text{air}}(z_0) - \frac{1}{h_s} p_{\text{air}}(z_0) (z - z_0) \quad (p_s(z_0) = p_{\text{air}}(z_0))$$

$$p_{\text{air}}(z) = p_{\text{air}}(z_0) + \left. \frac{dp}{dz} \right|_{\text{air}} (z - z_0) = p_{\text{air}}(z_0) - \frac{1}{h_{\text{air}}} p_{\text{air}}(z_0) (z - z_0)$$

$$\text{Et au premier ordre: } p_s(z) \ddot{z} \approx p_s(z_0) \ddot{z} = p_{\text{air}}(z_0) \ddot{z}$$

$$\text{L'équation différentielle devient: } p_{\text{air}}(z_0) \ddot{z} + \left( -\frac{1}{h_s} p_{\text{air}}(z_0) (z - z_0) + \frac{1}{h_{\text{air}}} p_{\text{air}}(z_0) (z - z_0) \right) q = 0$$

$$\text{D'où: } \ddot{z} + \left( \frac{1}{h_{\text{air}}} - \frac{1}{h_s} \right) g z = \left( \frac{1}{h_{\text{air}}} - \frac{1}{h_s} \right) g z_0 \quad \text{on a bien: } N^2 = \left( \frac{1}{h_{\text{air}}} - \frac{1}{h_s} \right) g$$

$$7. \frac{1}{h_{\text{air}}} = -\frac{1}{\rho} \left. \frac{d\rho}{dz} \right|_{\text{air}} = -\frac{RT}{M_{\text{air}} P} \frac{d}{dz} \left( \frac{M_{\text{air}} P}{RT} \right) = -\frac{T}{P} \left( \frac{1}{T} \frac{dP}{dz} - \frac{P}{T^2} \frac{dT}{dz} \right)$$

$$= -\frac{1}{P} \rho_0 k (-\Gamma) (1 - \Gamma z)^{k-1} + \frac{1}{T} (-\Gamma T_0)$$

$$= \frac{\Gamma k}{P} \underbrace{\rho_0 (1 - \Gamma z)^k}_{= P} \underbrace{(1 - \Gamma z)^{-1}}_{= T_0/T} - \Gamma \frac{T_0}{T}$$

$$= \Gamma k \frac{T_0}{T} - \Gamma \frac{T_0}{T}$$

$$= \Gamma \frac{T_0}{T} (k - 1)$$

$$\text{donc: } h_{\text{air}} = \frac{T}{T_0} \frac{1}{\Gamma (k - 1)}$$

$$8. \text{ Loi de Laplace: } PV^\gamma = \text{cte} \text{ ou encore: } \frac{P}{\rho^\gamma} = \text{cte} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} \quad \text{donc: } \rho = \rho_0 \left( \frac{P}{P_0} \right)^{1/\gamma}$$

$$\frac{1}{h_s} = -\frac{1}{\rho} \left. \frac{d\rho}{dz} \right|_s = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{P_0}{P} \right)^{1/\gamma} \cdot \frac{\rho_0}{P_0^{1/\gamma}} \cdot \frac{1}{\gamma} P^{1/\gamma - 1} \frac{dP}{dz}$$

$$= -\frac{1}{\gamma P} k P_0 (-\Gamma) (1 - \Gamma z)^{k-1}$$

$$= \frac{\Gamma k P_0 (1 - \Gamma z)^k}{\gamma P} (1 - \Gamma z)^{-1}$$

$$= \frac{\Gamma k}{\gamma} \frac{T_0}{T}$$

$$\text{donc: } h_s = \frac{\gamma}{\Gamma k} \frac{T}{T_0}$$

$$9. N^2 = \left( \frac{1}{h_{\text{air}}} - \frac{1}{h_s} \right) g$$

$$= \left( \Gamma \frac{T_0}{T} (k - 1) - \frac{\Gamma k}{\gamma} \frac{T_0}{T} \right)$$

$$= \Gamma \frac{T_0}{T} \left( k - 1 - \frac{k}{\gamma} \right)$$

$$= 5 - 1 - \frac{5}{1.4}$$

$$= 0.43$$

$N^2 > 0$  donc les mouvements verticaux sont stables car régis par une équation d'oscillateur harmonique.

I. C. Force exercée sur un ballon

10.  $F = K \rho_{\text{air}}^\alpha \cdot v^\beta \cdot R^\gamma$   $K$  sans dimension

$$MLT^{-2} = (ML^{-3})^\alpha \cdot (LT^{-1})^\beta \cdot L^\gamma \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha \\ 1 = -3\alpha + \beta + \gamma \\ -2 = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2 \end{cases}$$

Donc :  $F = K \rho_{\text{air}} R^2 v^2$

11. Equilibre thermique et mécanique  $\Rightarrow$  l'hélium et l'air sont à la même pression  $P$  et à la même température  $T$ 

$$\Pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{He}} g = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{M_{\text{He}} P}{RT} g \quad \text{or: } \rho_{\text{air}} = \frac{M_{\text{air}} P}{RT} \Rightarrow \frac{P}{RT} = \frac{\rho_{\text{air}}}{M_{\text{air}}}$$

$$\Pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{M_{\text{He}}}{M_{\text{air}}} \rho_{\text{air}} g$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot d \cdot \rho_{\text{air}} g$$

D'où :  $x = \frac{F_v}{\Pi} = \frac{\rho_{\text{air}} R^2 v^2}{\frac{4}{3}\pi R^3 d \rho_{\text{air}} g} \Rightarrow x = \frac{3}{4\pi} \frac{v^2}{R d g}$

Force du vent prédominante si :  $x > 1 \Rightarrow R < \frac{3v^2}{4\pi d g}$

A.N. :  $R < R_c = 196 \text{ m}$

Or  $R_{\text{maximal}}$  vaut 25 m, donc la force du vent sera toujours prédominante

12. Soit on se donne de l'enveloppe et des instruments

Le poids total du ballon est :  $(m + \frac{4}{3}\pi R^3 d \cdot \rho_{\text{air}}(z=0)) g$

A l'altitude  $z_{\text{max}}$  atteinte, la poussée d'Archimède est supérieure au poids :

$$(m + \frac{4}{3}\pi R^3 d \rho_{\text{air}}(z=0)) g < \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{air}}(z_{\text{max}}) g$$

$$m + \frac{4}{3}\pi R^3 d \cdot \frac{M_{\text{air}} P_{\text{sol}}}{RT_{\text{sol}}} < \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{M_{\text{air}} P_{\text{min}}}{RT_{\text{min}}}$$

Donc :  $m < m_{\text{max}} = \underbrace{\frac{4}{3}\pi R^3}_{=V} \frac{M_{\text{air}}}{R} \left( \frac{P_{\text{min}}}{T_{\text{min}}} - d \frac{P_{\text{sol}}}{T_{\text{sol}}} \right)$

Attention : constante des gaz parfaits

A.N. :  $m_{\text{max}} = 1.6 \text{ kg}$  Cela semble peu

I. D. Ballons à enveloppe élastique

13. Sur l'élément d'arc de cercle  $dl$  :  $d\vec{f} = \int dl \vec{u}_\theta$  - Puis :  $\vec{f} = \int_{(C)} d\vec{f}$

Par symétrie,  $\vec{f}$  sera selon l'axe  $Oz$ , vers le bas. On ne garde que la composante de  $d\vec{f}$  selon  $Oz$ , soit :  $df_z = -\int dl \sin \theta$ 

Donc :  $\vec{f} = \int_{(C)} -\int dl \sin \theta \vec{u}_z$  soit :  $\vec{f} = -\int 2\pi R \sin^2 \theta \vec{u}_z$

Force de pression élémentaire sur  $dS$ :  $d\vec{F}_p = (P_i - P_e) dS \vec{u}_n$  ( $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ )

Composante selon  $Oz$ :  $dF_p = (P_i - P_e) dS \cos\theta$

$$\text{Donc: } \vec{F}_p = \int_{\text{surface supérieure}} (P_i - P_e) R^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\varphi \quad \vec{u}_z = (P_i - P_e) R^2 \cdot 2\pi \cdot \int_0^\theta \sin\theta \cos\theta d\theta \vec{u}_z$$
$$= (P_i - P_e) \pi R^2 \sin^2\theta \vec{u}_z$$

$$\text{Soit finalement: } \vec{F}_p = (P_i - P_e) \pi R^2 \vec{u}_z$$

$$14. \text{ A l'équilibre: } \vec{f} + \vec{F}_p = \vec{0} \Rightarrow -\xi 2\pi R \sin^2\theta + (P_i - P_e) \pi R^2 \sin^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_i - P_e = \frac{2\xi}{R}}$$

$$15. \xi = (P_i - P_e) \frac{R_1}{2} \quad \text{A.N: } \xi = 10^5 \text{ Pa}\cdot\text{m} \quad \beta = 1$$

$$16. \text{ Loi de Laplace: } P_i(z) V(z)^{\gamma_{He}} = P_i(0) V(0)^{\gamma_{He}}$$

$$(P_e(z) + \frac{2\xi}{R}) R^{3\gamma_{He}} = (P_0 + \frac{2\xi}{R_1}) R_1^{3\gamma_{He}}$$

$$\frac{P_e(z)}{P_0} + \frac{2\xi}{P_0 R} = (1 + \frac{2\xi}{P_0 R_1}) (\frac{R_1}{R})^{3\gamma_{He}}$$

$$\delta(z) + \beta \frac{R_1}{R} = (1 + \beta) x^{3\gamma_{He}}$$

$$\delta(z) = (1 + \beta) x^{3\gamma_{He}} - \beta x \quad \text{donc: } \boxed{\psi(x) = (1 + \beta) x^{3\gamma_{He}} - \beta x}$$

$$P_e(z) < P_0 \Rightarrow \delta(z) < 1 \Rightarrow \psi(x) < 1$$

L'étude de la fonction  $\psi(x)$  pour  $x > 0$  montre qu'elle est inférieure à 1 pour  $x \in [0, 1[$  puis supérieure à 1 ensuite  $\Rightarrow x < 1 \Rightarrow R_1 < R$

$$17. \text{ Pour } z = 3 \text{ km: } \delta = \psi \Rightarrow x = 0,96 \Rightarrow \underline{R = 2,1 \text{ m}}$$

$$\text{Pour } z = 9 \text{ km: } \delta = \psi \Rightarrow x = 0,9 \Rightarrow \underline{R = 2,2 \text{ m}}$$

$$\text{Pour } z = 15 \text{ km: } \delta = \psi \Rightarrow x = 0,87 \Rightarrow \underline{R = 2,3 \text{ m}}$$