

DEVOIR MAISON 7 (SÉRIES ENTIÈRES)
Corrigé

Source : Centrale PC 2023

Q1. La série entière $\sum_{n \geq 0} x^n$ est la série géométrique. D'après le cours :

$$R\left(\sum_{n \geq 0} x^n\right) = 1 \text{ et pour tout } x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Q2. Par le cours, on a :

$$R\left(\sum_{n \geq 0} nx^n\right) = R\left(\sum_{n \geq 0} x^n\right) = 1.$$

Notons $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

On en déduit que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ainsi :

$$R\left(\sum_{n \geq 0} nx^n\right) = 1 \text{ et pour tout } x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Q3. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$R\left(\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} x^n\right) = R\left(\sum_{n \geq k} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^n\right) \stackrel{(*)}{=} R\left(\sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} x^n\right) \stackrel{(**)}{=} R\left(\sum_{n \geq 0} n^k x^n\right) \stackrel{(***)}{=} R\left(\sum_{n \geq 0} x^n\right) = 1.$$

(*) $\frac{1}{k!}$ est une constante multiplicative non nulle.

(**) $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^k$ car produit de k termes équivalents à n .

(***) La multiplication du coefficient par n (ici k fois) ne change pas le rayon de convergence.

On note toujours $S : x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

Par k dérivations terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = S^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}},$$

cette dernière égalité se prouvant par récurrence (initialisation vérifiée pour $k = 0$ et pour l'hérédité, on notera que $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = (1-x)^{-k-1}$ a pour dérivée $x \mapsto (-1) \times (-k-1) \times (1-x)^{-k-2} = \frac{k+1}{(1-x)^{k+2}}$

sur $] - 1, 1[$.

On en déduit que pour tout $x \in] - 1, 1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^n = \frac{x^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} = \frac{x^k}{k!} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Ainsi :

$$R\left(\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} x^n\right) = 1 \text{ et pour tout } x \in] - 1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Q4. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a déjà vu que :

$$R\left(\sum_{n \geq 0} n^k x^n\right) = R\left(\sum_{n \geq 0} x^n\right) = 1.$$

On en déduit que la somme de cette série entière est définie (au moins) sur $] - 1, 1[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_k \text{ est définie sur }] - 1, 1[.}$$

Q5. On a $\deg(H_0) = 0$ et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\deg(H_j) = j$ (produit de j polynômes de degré 1).

Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\deg(H_j) = j$.

La famille (H_0, \dots, H_k) est donc une famille constituée de $k+1$ polynômes de $\mathbb{R}_k[X]$, espace vectoriel de dimension $k+1$, et cette famille est libre car ces polynômes sont non nuls et de degrés deux à deux distincts.

Ainsi :

$$\boxed{(H_0, \dots, H_k) \text{ est une base de } \mathbb{R}_k[X].}$$

Comme $X^k \in \mathbb{R}_k[X]$, on peut écrire X^k de façon unique à l'aide de ses coordonnées dans cette base.

$$\boxed{\text{Il existe une unique famille } (\alpha_{k,0}, \dots, \alpha_{k,k}) \text{ dans } \mathbb{R}^{k+1} \text{ telle que } X^k = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} H_j.}$$

Q6. Soit $k \in \mathbb{N}$. En évaluant la relation précédente en 0, on obtient $0^k = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} H_j(0) = \alpha_{k,0}$ car pour tout $j \geq 1$, $H_j(0) = 0$.

On en déduit que :

$$\boxed{\alpha_{0,0} = 1 \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \alpha_{k,0} = 0.}$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, H_j est de degré j et a pour coefficient dominant $\frac{1}{j!}$.

On a $X^k = \alpha_{k,k} H_k + \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{k,j} H_j}_{\text{degré} < k}$. Par identification du coefficient de X^k , on obtient $1 = \alpha_{k,k} \frac{1}{k!}$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \alpha_{k,k} = k!}.$$

Q7. Soit $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq j \leq k$.

En évaluant l'égalité $X^k = \sum_{i=0}^k \alpha_{k,i} H_i$ en j , on obtient $j^k = \sum_{i=0}^k \alpha_{k,i} H_i(j)$.

Soit $i \in \mathbb{N}$. Calculons $H_i(j)$.

Pour $i = 0$, on a $H_i(j) = 1 = \binom{j}{0}$.

Si $1 \leq i \leq j$ alors $H_i(j) = \frac{1}{i!} \prod_{\ell=0}^{i-1} (j - \ell) = \frac{1}{i!} \frac{j!}{(j-i)!} = \binom{j}{i}$.

Si $i > j$ alors $H_i(j) = \frac{1}{i!} \prod_{\ell=0}^{i-1} (j - \ell) = 0$ car l'un des facteurs du produit est nul.

On en déduit que :

$$j^k = \sum_{i=0}^j \alpha_{k,i} \binom{j}{i} = \alpha_{k,j} + \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \alpha_{k,i}.$$

Ainsi :

pour tout couple $(j, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq j \leq k$, $\alpha_{k,j} = j^k - \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \alpha_{k,i}$.

Q8. Soit $k \in \mathbb{N}$.

Notons que par les calculs effectués à la question précédente, on a pour tout $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, $H_j(n) = \binom{n}{j}$.

Soit $x \in]-1, 1[$. On a :

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} H_j(n) \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} \binom{n}{j} x^n = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{j} x^n$$

par linéarité car pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la série $\sum_{n \geq 0} \binom{n}{j} x^n$ converge d'après Q3.

Par Q3, on obtient également :

$$f_k(x) = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} \frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} \frac{x^j (1-x)^{k-j}}{(1-x)^{k+1}} = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$$

par mise sur même dénominateur, en posant $P_k = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}$.

Montrons l'unicité.

Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie pour tout $x \in]-1, 1[$, $f_k(x) = \frac{Q(x)}{(1-x)^{k+1}}$ alors pour tout $x \in]-1, 1[$, $P_k(x) = Q(x)$.

Le polynôme $P_k - Q$ a donc une infinité de racines donc c'est le polynôme nul. D'où $Q = P_k$.

On a donc prouvé :

pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$

et ce polynôme vérifie la relation $P_k = \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} X^j (1-X)^{k-j}$.

Q9. Par dérivation terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence, on a pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f'_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^k n x^{n-1} \text{ donc } x f'_k(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{k+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1} x^n = f_{k+1}(x).$$

Comme pour tout $x \in]-1, 1[$, $f_k(x) = \frac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$, on obtient également en dérivant :

$$f'_k(x) = \frac{P'_k(x)(1-x)^{k+1} + P_k(x)(k+1)(1-x)^k}{(1-x)^{2(k+1)}} = \frac{(1-x)P'_k(x) + (k+1)P_k(x)}{(1-x)^{k+2}}.$$

On a donc pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f_{k+1}(x) = \frac{x(1-x)P'_k(x) + (k+1)xP_k(x)}{(1-x)^{k+2}}.$$

Par unicité établie en Q8, on en déduit :

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{k+1} = X(1-X)P'_k + (k+1)XP_k$.

Q10. Pour tout $x \in]-1, 1[$, $f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ donc par l'unicité établie en Q8, $P_0 = 1$.

D'après la question précédente :

$$P_1 = X(1-X)P'_0 + XP_0 = X$$

puis

$$P_2 = X(1-X)P'_1 + 2XP_1 = X(1-X) + 2X^2 = X^2 + X$$

puis

$$P_3 = X(1-X)P'_2 + 3XP_2 = X(1-X)(2X+1) + 3X(X^2+X) = X^3 + 4X^2 + X.$$

$$\boxed{P_2 = X^2 + X \text{ et } P_3 = X^3 + 4X^2 + X.}$$

Q11. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_k est un polynôme unitaire de degré k .

Initialisation : $P_0 = 1$ est bien un polynôme unitaire de degré 0.

Pour plus de commodité dans l'hérédité, vérifions aussi pour $k = 1$: $P_1 = X$ est bien un polynôme unitaire de degré 1.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P_k est un polynôme unitaire de degré k .

On a $P_{k+1} = X(1-X)P'_k + (k+1)XP_k$.

Comme $k \geq 1$, on sait que P'_k est un polynôme de degré $k-1$ et de coefficient dominant k .

Ainsi, $X(1-X)P'_k$ est un polynôme de degré $k-1+2 = k+1$ et de coefficient dominant $-k$.

Par ailleurs, $(k+1)XP_k$ est un polynôme de degré $k+1$ et de coefficient dominant $k+1$.

Par somme, comme $-k+k+1 = 1 \neq 0$, on en déduit que P_{k+1} est un polynôme unitaire de degré $k+1$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ le degré de } P_k \text{ est } k \text{ son coefficient dominant est } 1.}$$

Q12. Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, 1[$, $x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) = P_k(x)$.

Initialisation : Pour $k = 1$, comme $P_1 = X$, on a pour tout $x \in]0, 1[$, $x^2P_1(\frac{1}{x}) = x^2 \times \frac{1}{x} = x = P_1(x)$.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $x \in]0, 1[$, $x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) = P_k(x)$.

Par dérivation, on obtient pour tout $x \in]0, 1[$:

$$(k+1)x^kP_k(\frac{1}{x}) - x^{k-1}P'_k(\frac{1}{x}) = P'_k(x).$$

Par évaluation de la relation obtenue à la question Q9 en $\frac{1}{x}$, on obtient pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\begin{aligned} x^{k+2}P_{k+1}(\frac{1}{x}) &= x^{k+1}(1-\frac{1}{x})P'_k(\frac{1}{x}) + (k+1)x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) \\ &= x^2(1-\frac{1}{x})x^{k-1}P'_k(\frac{1}{x}) + (k+1)P_k(x) \\ &= x^2(1-\frac{1}{x})((k+1)x^kP_k(\frac{1}{x}) - P'_k(x)) + (k+1)P_k(x) \\ &= (x-1)(k+1)x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) + x(1-x)P'_k(x) + (k+1)P_k(x) \\ &= x(k+1)P_k(x) + x(1-x)P'_k(x) \\ &= P_{k+1}(x). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } x \in]0, 1[, x^{k+1}P_k(\frac{1}{x}) = P_k(x).}$$

Q13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On sait que P_k est un polynôme de degré k donc il existe $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tels que $P_k = \sum_{j=0}^k a_j X^j$.

D'après la question précédente, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$P_k(x) = x^{k+1} \sum_{j=0}^k a_j x^{-j} = \sum_{j=0}^k a_j x^{k+1-j} = \sum_{i=1}^{k+1} a_{k+1-i} x^i.$$

Comme le polynôme $P_k - \sum_{i=1}^{k+1} a_{k+1-i} x^i$ a une infinité de racines, il est nul.

On a donc $P_k = \sum_{j=1}^{k+1} a_{k+1-j} x^j$ et par unicité des coefficients, on obtient :

pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, les coefficients de degré j et $k+1-j$ de P_k sont égaux.

Q14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\binom{2n}{n} \neq 0$ (car $n \leq 2n$) et on a :

$$\left| \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \right| = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} \frac{n!^2}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \sim \frac{4n^2}{n^2} = 4 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4.$$

Par la règle de d'Alembert pour les séries entières, on en déduit que :

$$R = \frac{1}{4}.$$

On sait que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$(1+u)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1) \dots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} u^n.$$

Pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, comme $u = -4x \in]-1, 1[$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-4x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1) \dots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-1)^n 2^{2n} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{n!} (-1)^n 2^{2n} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-1) \times 2n}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (2n)!}{n! \times 2^n n!} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!^2} x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.

Q15. On considère la série entière $\sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Par le théorème de dérivation des séries entières, son rayon de convergence est le même que celui de la série entière $\sum \binom{2n}{n} x^n$ (obtenue par dérivation terme à terme) donc $R\left(\sum \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = R = \frac{1}{4}$, et en notant f sa somme, on a pour tout $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Soit $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$. En intégrant entre 0 et x , on obtient :

$$f(x) - f(0) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-4t}} dt = \left[-\frac{1}{2} \sqrt{1-4t} \right]_0^x = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}.$$

Comme de plus $f(0) = 0$, on en déduit que $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$.

Ainsi, en divisant par x , on obtient :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]-R, R[\setminus \{0\}, \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}}.$$

Q16. Par produit de Cauchy des séries entières $\sum \binom{2n}{n} x^n$ et $\sum \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$ qui ont toutes les deux pour rayon de convergence $\frac{1}{4}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \min(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n \right).$$

On en déduit par les deux questions précédentes que pour tout $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} x^n = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \times \frac{1}{\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right).$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in]-R, R[\setminus \{0\}, \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right)}.$$

Q17. D'après Q14, on a pour tout $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$:

$$\frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right) = \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{2x} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2(n+1)}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} x^n.$$

Par Q16, on en déduit que pour tout $x \in]-R, R[$ (vrai aussi en $x = 0$, les deux membres valent 1) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}}.$$