DM8 (SÉRIES ENTIÈRES - INTÉGRATION)
Pour le lundi 5 janvier

I. PROBLÈME 1 : TYPE CCINP

A. INTÉGRALES DE WALLIS

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$.
4. Calculer $(n+1)W_{n+1}W_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. Montrer que $W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} W_n$.
7. Déduire des questions précédentes qu'on a $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.
9. Déterminer l'expression explicite de W_{2n} et W_{2n+1} en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

B. INTÉGRALES DE GAUSS

On appelle *intégrales de Gauss* les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\mathrm{d}t$ où a est un réel strictement positif. Le but de cet exercice est de déterminer leur valeur.

Dans toute cette partie, **on admet que l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ **converge.**
Soit n un entier naturel non nul.

10. À l'aide d'un changement de variable, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

11. À l'aide d'un changement de variable, montrer que :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x = W_{2n+1}.$$

12. À l'aide d'un changement de variable, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$ converge et :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} = W_{2n-2}.$$

13. Montrer que pour tout réel u, on a $e^u \geqslant 1+u$.

14. Montrer alors que :

$$\begin{cases} (1-u)^n \leqslant e^{-nu} & \text{si} \quad u \leqslant 1 \\ e^{-nu} \leqslant \dfrac{1}{(1+u)^n} & \text{si} \quad u > -1. \end{cases}$$

15. En déduire les inégalités suivantes :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

16. En utilisant la question 7, déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

17. En déduire que pour tout $a \in]0,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

II. Problème 2 : type Centrale/Mines

Ce problème est composé de deux parties.

Dans la partie I, on définit une suite $(\alpha_n)_n$ d'entiers naturels via le développement en série entière d'une fonction auxiliaire et on s'intéresse en particulier à la suite extraite $(\alpha_{2n+1})_n$ formée des termes de rang impair.

Dans la partie II, on détermine un équivalent, lorsque n tend vers l'infini, de α_{2n+1} en faisant appel à des outils analytiques et notamment la fonction zêta de Riemann.

La partie II fait appel, très ponctuellement, à des résultats de la partie I.

I. Introduction d'une fonction auxiliaire

Soit l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$. On considère la fonction f définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{\sin x + 1}{\cos x}.$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f et, par convention, $f^{(0)} = f$.

I.A - Dérivées successives

1. Exprimer les dérivées f', f'' et $f^{(3)}$ à l'aide des fonctions usuelles.

2. Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

On explicitera les polynômes P_0, P_1, P_2, P_3 et, pour tout entier naturel n, on exprimera P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

3. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, le polynôme P_n est unitaire, de degré n et que ses coefficients sont des entiers naturels.

4. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2f'(x) = f(x)^2 + 1.$$

Pour tout entier naturel n, on pose $\alpha_n = f^{(n)}(0) = P_n(0)$.

5. Montrer $2\alpha_1 = \alpha_0^2 + 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2\alpha_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha_k \alpha_{n-k}.$$

I.B - Développement en série entière

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_n}{n!} x^n$ et g sa somme.

6. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \pi/2[, \quad \sum_{n=0}^{N} \frac{\alpha_n}{n!} x^n \leqslant f(x).$$

7. En déduire la minoration $R \geqslant \pi/2$.

8. Montrer

$$\forall x \in I, \quad 2g'(x) = g(x)^2 + 1.$$

9. Montrer

$$\forall x \in I, \quad f(x) = g(x).$$

Considérer les fonctions $\arctan f$ *et* $\arctan g$.

10. En déduire que $R = \pi/2$.

I.C - Partie paire et partie impaire du développement en série entière

11. Justifier que toute fonction $h : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $h = p + i$ avec $p : I \to \mathbb{R}$ une fonction paire et $i : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.

12. En déduire

$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \text{ et } \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

On note t la fonction définie sur I par $t(x) = \tan(x)$.

13. Pour tout entier naturel n, exprimer $t^{(n)}(0)$ en fonction des réels $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

14. Rappeler, sans justification, l'expression de t' en fonction de t.

15. En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{2k-1} \alpha_{2k-1}\alpha_{2n-2k+1}.$$

II. Équivalent de α_{2n+1}

II.A - La fonction zêta

Pour tout $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

16. Encadrer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ par deux intégrales puis en déduire $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$.

17. Déterminer $C(s)$ tel que
$$\forall s \in]1, +\infty[, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^s} = C(s)\zeta(s).$$

II.B - Une formule pour la fonction cosinus

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on pose $I_n(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(2xt)(\cos t)^n \mathrm{d}t$.

18. Montrer
$$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) \text{ et } \left(1 - \frac{4x^2}{n^2}\right) \frac{I_n(x)}{I_n(0)} = \frac{I_{n-2}(x)}{I_{n-2}(0)}.$$

19. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\pi x) = \pi x \frac{I_{2n}(x)}{I_{2n}(0)} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

20. En déduire
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, 1[, \quad \cos(\pi x) = \frac{I_{4n}(2x)}{I_{4n}(0)} \frac{I_{2n}(0)}{I_{2n}(x)} \prod_{p=1}^{n} \left(1 - \frac{4x^2}{(2p-1)^2}\right).$$

On admet que cela permet d'obtenir un autre développement de la fonction tangente (sujet d'origine tronqué) :
$$\forall x \in [0, 1/2[, \quad \pi \tan(\pi x) = \sum_{p=1}^{+\infty} 2(2^{2p} - 1)\zeta(2p)x^{2p-1}.$$

II.C - Un équivalent de α_{2n+1}

21. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{2n+1} = \frac{2(2^{2n+2} - 1)(2n+1)!}{\pi^{2n+2}} \zeta(2n+2).$$

22. En déduire un équivalent de α_{2n+1} lorsque n tend vers l'infini.