Mécanisme pendule-ressort

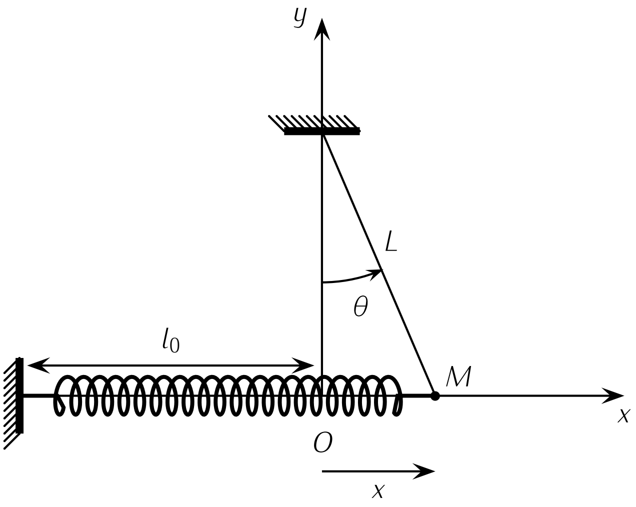


Figure 1 – Schéma du montage

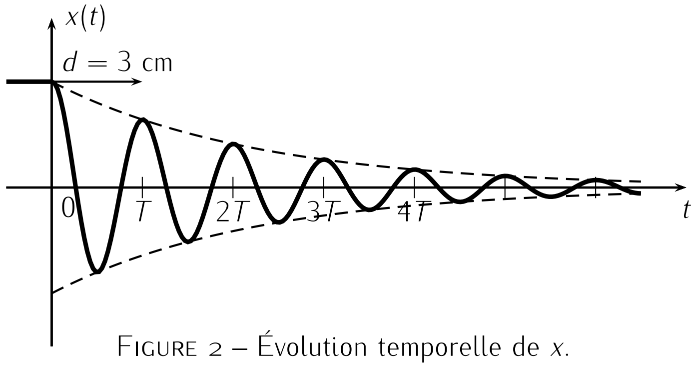


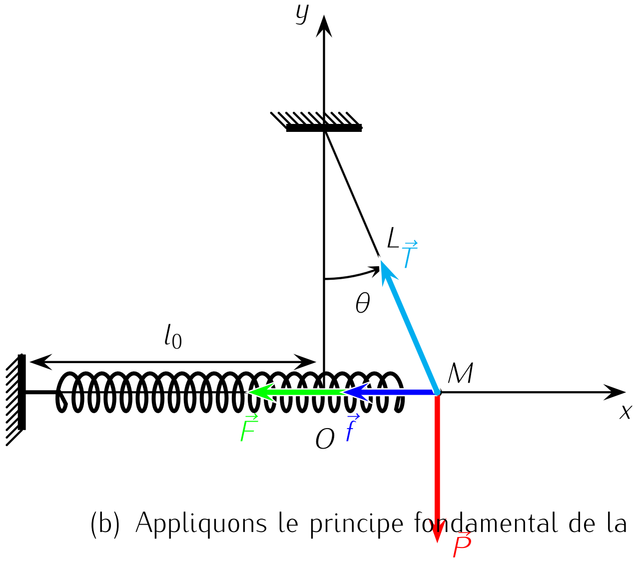
Figure 2 – Évolution temporelle de x.

Un point matériel M (masse m), attaché à un ressort horizontal (raideur k, longueur l_0 au repos), est suspendu à un fil inextensible de longueur L (Figure 1). On notera T la norme de la tension du fil.
Le référentiel du laboratoire, lié aux points de fixation du ressort et du pendule pourra être considéré comme galiléen. L'accélération de la pesanteur est dirigée selon $-\vec{e}_y$: $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ avec $g = 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$. On considère des petits mouvements quasi horizontaux du point M, repéré par son abscisse x telle que $x \ll L$.
En outre, le point matériel M, de vitesse $\vec{v} = v\vec{u}_x$ est soumis à une force de frottement fluide $\vec{f}_d = -\alpha\vec{v}$ (avec le coefficient α positif).

1. (a) Faire un bilan des forces, donner leur expression en fonction de x et ses dérivées temporelles. Représenter
Q1 les forces sur un schéma.
   (b) Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur les deux axes (on gardera encore les $\sin\theta$ ou
Q2 $\cos\theta$ ou $\tan\theta$ à cette question, la simplification se fera à la prochaine question).
   (c) En éliminant T et en considérant les petits angles, établir l'équation différentielle du mouvement de M
Q3 et la mettre sous la forme suivante :
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
   Identifier les paramètres ω_0 et Q. Préciser leur dimension.
   (a) L'allure de l'évolution de x est donnée sur la figure 2. Quelle est la nature du régime de variation de
Q4 $x(t)$?
   (b) Donner l'expression de $x(t)$, on fera apparaître λ et μ deux constantes que l'on ne précisera pas pour
Q5 l'instant.
Q6 (c) Déterminer les expressions de λ et μ en tenant compte des conditions initiales.
2. On appelle décrément logarithmique la grandeur sans dimension
$$\delta = \frac{1}{n} ln\left(\frac{x(t)}{x(t+nT)}\right)$$
   où T est la pseudo-période, t le temps et n un entier.
   (a) En supposant $\omega \simeq \omega_0$, montrer que $\delta \simeq \frac{\pi}{Q}$ (on pourra utiliser la forme générale de $x(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega t +$
Q7 $\varphi)$).
Q8 (b) Déterminer la valeur numérique du paramètre Q à partir du graphe de la Figure 2.

Mécanisme pendule-ressort

Q9 1. (a) Système : point matériel M (masse m).



Référentiel : terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}_g$. Forces :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- le force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$
- la tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$
- la force élastique du ressort $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x = -kx\vec{e}_x$

Q10 (b) Appliquons le principe fondamental de la dynamique au système dans $\mathcal{R}_g$:

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = m\vec{g} + \vec{T} - \alpha\dot{x}\vec{e}_x - kx\vec{e}_x$$

L'accélération est uniquement selon $\vec{e}_x$ puisque l'énoncé indique que le mouvement est quasi-horizontal. Par projection sur les axes Ox et Oy, on obtient :

$\boxed{m\ddot{x} = -kx - T\sin\theta - \alpha\dot{x} \quad \text{et} \quad mg = T\cos\theta}$

(c) Grâce à la projection selon $\vec{e}_y$, on en déduit $T = mg/\cos\theta$. On injecte dans la projection selon x et on
Q11 obtient :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx + mg\tan\theta = 0$$

Puisque $\theta \ll 1$, utilisons $\tan\theta \simeq \theta \simeq \sin\theta = \frac{x}{L}$ pour en déduire :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right)x = 0$$

Soit $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ en posant $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{L}}}$ la pulsation propre et $\boxed{Q = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{L}}}$ le facteur de qualité.

La pulsation propre est homogène à l'inverse d'un temps. Le facteur de qualité est sans dimension.

2. (a) Le régime observé est pseudo-périodique (présence d'oscillations).

Q12 (b) Écrivons l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ de discriminant négatif : $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2$.

$r\pm = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega$ avec $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q}$ le temps d'amortissement et $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ la pseudo-pulsation de l'oscillateur.

$\boxed{x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)}$

(c) La lecture du graphique nous fournit les conditions initiales : $x(0) = d$ et $\dot{x}(0) = 0$.

On en déduit $\boxed{d = A}$ puis on dérive $x(t)$.

$\dot{x}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(-A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)\right) - \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$

Q13 Ce qui donne : $0 = B\omega - \frac{1}{\tau}d$ d'où $\boxed{B = \frac{d}{\omega\tau}}$

3. (a) Le plus simple consiste à réécrire la solution sous la forme $x(t) = C\exp(-\frac{t}{\tau})\cos(\omega t + \varphi)$ alors :

$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_0}{x_n}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{A\exp(-\frac{t}{\tau})\cos(\omega t + \varphi)}{A\exp(-\frac{t+nT}{\tau})\cos(\omega(t+nT)+\varphi)}\right) = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\omega\tau}$ car $\omega T = 2\pi$.

Q14 Or on fait l'approximation $\omega \simeq \omega_0$ donc $\boxed{\delta \simeq \frac{\pi}{Q}}$

Q15 (b) On mesure sur le graphique $x_0 = 4{,}0$ cm et $x_2 = 1{,}1$ cm pour déterminer δ. A.N. : $Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi \times \frac{1}{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4{,}0}{1{,}1}\right)} \simeq 5$.

On vérifie que l'on a environ 5 oscillations.