

## RESSORT EN ROTATION

On considère un mobile quasi ponctuel  $M$ , de masse  $m$  qui peut se déplacer sans frottement le long d'un axe ( $OM$ ) toujours horizontal et mis en rotation uniforme autour de l'axe  $Oz$  vertical, la vitesse angulaire étant nommée  $\omega = \dot{\theta} = Cte$ .

Le point  $M$  est relié à  $O$  par l'intermédiaire d'un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0 = r_0$ .

On a représenté la base cylindro polaire mobile sur les figures.

Pour les applications numériques, on prendra  $r_0 = 20,0$  cm,  $m = 100$  g et  $k = 20$  N.m<sup>-1</sup>.

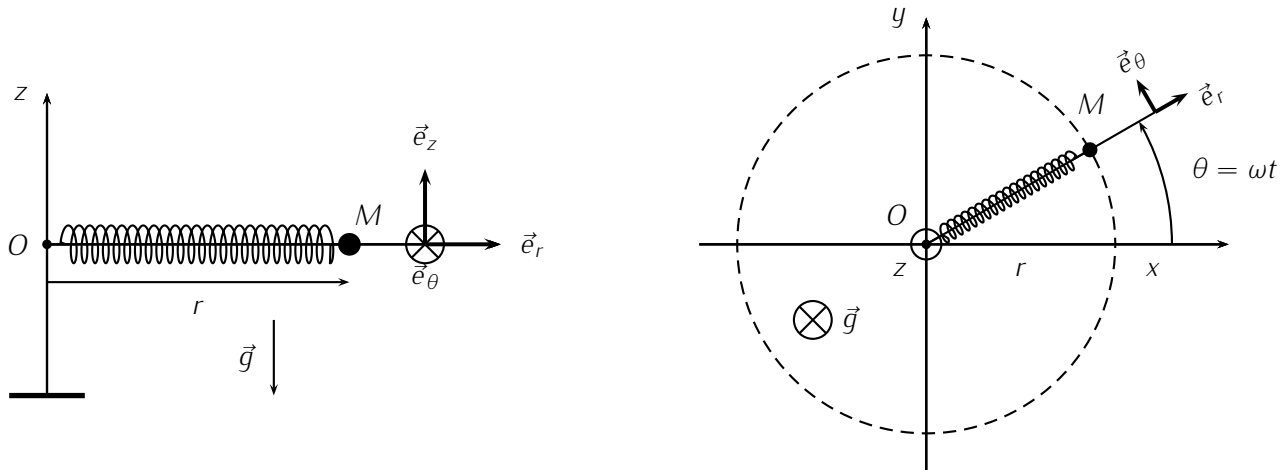


FIGURE 1 – Masse liée à ressort en rotation uniforme

### A. Cinématique

1. Rappeler l'expression la plus générale du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ , du vecteur vitesse  $\vec{v}$  et du vecteur accélération d'un point matériel  $M$  dans le système de coordonnées cylindro-polaires ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ ).
2. Que devient cette dernière expression dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme?

### B. Mouvement circulaire

Dans un premier temps, on suppose que  $M$  est immobile **par rapport à la tige en rotation** ( $r = r_e = Cte$ ) c'est à dire qu'il est animé d'un mouvement circulaire uniforme, de rayon  $r_e$  dans le référentiel lié au sol qu'on considérera comme galiléen.

1. Par application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié au sol, déterminer l'expression de  $\vec{R}$  la réaction de l'axe sur  $M$  en fonction des données et des vecteurs de la base cylindro-polaire.
2. Que peut-on dire de l'énergie mécanique du système dans le référentiel galiléen? Justifiez.
3. Déterminer l'expression de  $r_e$  en fonction des données  $\omega$ ,  $k$ ,  $m$  et  $r_0$ .
4. L'expression de  $r_e$  est-elle valable quelle que soit la valeur de  $\omega$ ? Montrer qu'il existe une valeur particulière de  $\omega$ , notée  $\omega_e$ . Calculer sa valeur numérique.
5. L'expression de la force élastique exercée par le ressort n'est valable que si l'allongement du ressort, ici égal à  $r - r_0$  reste inférieur à  $\frac{r_0}{2}$ .  
Exprimer, en fonction de  $\omega_e$ , la valeur maximale  $\omega_M$  de  $\omega$  pour que l'expression de  $r_e$  établie à la question 3. soit valable.
6. Calculer  $\omega_M$  et la valeur de  $r_e$  pour  $\omega = 0,8\omega_M$ .

### C. Mouvement hors équilibre

On étudie maintenant le mouvement de  $M$  autour de sa position d'équilibre sur la tige en rotation ( $r \neq Cte$ ). On posera  $x = r - r_e$ .

Pour les applications numériques, on prendra  $\omega = \frac{0,8\omega_M}{2}$ .

- Q9 1. Quelle est la nouvelle expression de  $\vec{R}$  la réaction de l'axe sur  $M$  en fonction des données, des vecteurs de base et de dérivées temporelles ?
- Q10 2. Montrez que l'énergie mécanique n'est pas constante. Comment en pratique maintient-on  $\dot{\theta} = \omega$  constante ?
- Q11 3. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $r$ .
- Q12 4. En déduire celle vérifiée par  $x = r - r_e$ .
- Q13 5. Représentez l'allure de la trajectoire de  $M$  dans le référentiel lié au sol si  $\omega = 0,4 \cdot \omega_M < \omega_e$
- Q14 6. Exprimez la pulsation  $\Omega$  et la période  $T$  des oscillations de  $M$  en fonction de  $\omega$  et  $\omega_e$ . Commentez cette expression selon les valeurs de  $\omega$ . Calculez  $T$ .
- Q15 7. Quelle est la relation liant  $\omega$  et  $\Omega$  pour que la trajectoire de  $M$  dans le référentiel local soit une courbe fermée ?

### D. Un petit penchant pour la difficulté ?

On incline maintenant d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale la tige sur laquelle coulisse  $M$  sans frottement. La longueur du ressort,  $OM$  est maintenant notée  $l$  (longueur à vide  $l_0 = 20,0$  cm) alors que  $r = HM$  où  $H$  est le projeté de  $M$  sur l'axe  $Oz$ .

Pour les applications numériques, on prendra  $\alpha = 20^\circ$ ,  $\omega = \frac{0,8\omega_M}{2}$  et  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ .

- Q16 1. Dans un premier temps, on maintient la tige immobile dans le référentiel lié au sol :  $\omega = 0$  et  $l = Cte$ .  
Quelle est, en fonction des données, l'expression de
  - Q17 (a)  $l_1$  la valeur de  $l$  à l'équilibre ?
  - (b)  $\vec{R}$  la réaction du support ?
- Q18 2. On met à nouveau la tige en rotation, à la vitesse angulaire  $\omega = Cte$ .  
Quelle est, en fonction des données, l'expression de  $l_2$  la valeur de  $l$  quand  $M$  est immobile par rapport à la tige ?  
Vérifiez votre expression en comparant à la valeur de  $r_e$  trouvée en B. 3.

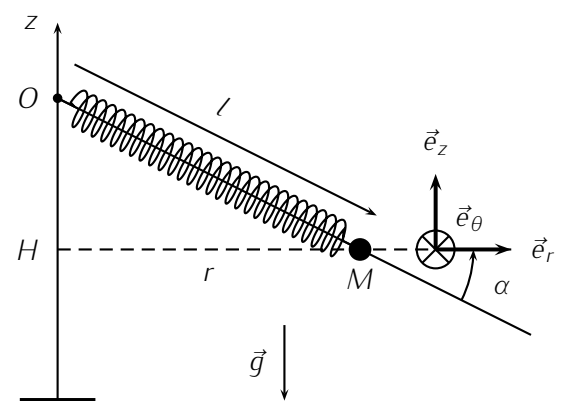
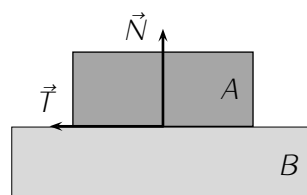


FIGURE 2 – Tige inclinée

## HYSTÉRÉSIS DE FROTTEMENT

Un solide granulaire est un matériau composé de particules solides discrètes de taille typique comprise entre 100 et 3000  $\mu\text{m}$ , et qui restent le plus souvent en contact les unes avec les autres. Cette classe de matériaux comprend les ciments, les sables, les graviers, les granulats, les céréales... On s'intéresse dans ce problème à un aspect statique de la physique de ces systèmes qui restent encore assez mal compris.

### Formulaire



L'action du solide  $B$  sur le solide  $A$  en contact se décompose en une composante normale  $\vec{N}$  et une composante tangentielle  $\vec{T}$  vérifiant :

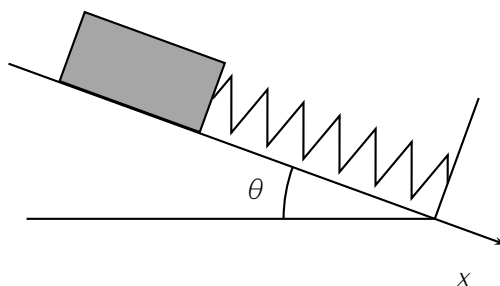
$$\begin{cases} |\vec{T}| \leq \mu_s |\vec{N}| & \text{en l'absence de glissement entre } A \text{ et } B \\ |\vec{T}| = \mu_d |\vec{N}| & \text{lorsqu'il y a glissement de } A \text{ sur } B. \end{cases}$$

$\mu_s$  et  $\mu_d$  sont appelés coefficients de frottement respectivement statique et dynamique et vérifient l'inégalité :  $\mu_d < \mu_s$ .

## 0.1 Hystérésis de frottement

Une des difficultés conceptuelles majeures pour la description d'un système comportant du frottement solide est l'impossibilité de prévoir les positions d'équilibre et le bilan des forces à moins de connaître de façon détaillée l'histoire de la mise en équilibre. Le but de cette partie est d'illustrer ce phénomène (dit d'hystérésis) sur un exemple simple.

Une brique parallélépipédique de poids  $P$  est en contact avec une paroi solide inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport au plan horizontal et est reliée à un ressort de raideur  $k$  (figure ci-dessous). Soit  $\mu_s$ , le coefficient de frottement statique ; on supposera pour simplifier que le coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  est nul et qu'un frottement visqueux très important permet l'arrêt du mouvement. On note  $x$  la déformation du ressort ( $x = 0$  correspond à la position pour laquelle la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide détendu). On cherche à déterminer cette déformation  $x$  à l'équilibre en fonction de l'angle  $\theta$ .



- Q19 1. Exprimer la force de rappel du ressort en fonction de  $k$ ,  $x$  et  $\vec{e}_x$  le vecteur unitaire selon l'axe  $x$ . Vérifier explicitement le signe de cette force.
- Q20 2. On suppose pour le moment que la masse est immobile et que  $\theta = 0$ . À l'aide d'un bilan des forces en déduire  $T = |\vec{T}|$  et  $N = |\vec{N}|$  en fonction de  $x$ ,  $P$  et  $k$ .
- Q21 3. Quelle est la plage de valeurs possibles pour  $x$  à l'équilibre ? Autrement dit quelles sont les  $x$  pour lesquelles l'inégalité  $|\vec{T}| \leq \mu_s |\vec{N}|$  est effectivement vérifiée ?
- Q22 4. Reprendre les deux questions précédentes pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .
- Q23 5. La masse étant immobile et le plan incliné d'un angle  $\theta$ , à l'aide d'un bilan des forces exprimer  $T = |\vec{T}|$  et  $N = |\vec{N}|$  en fonction de  $x$ ,  $P$ ,  $k$  et  $\theta$ . Il est extrêmement vivement conseillé de faire un schéma.
- La paroi est supposée initialement horizontale et le ressort détendu ( $x_0 = 0$ ). On incline progressivement la paroi, l'angle  $\theta$  variant de 0 à  $\pi/2$  ; on note alors  $\theta^+$  les angles d'inclinaison croissants. On désigne par  $x_1^+$  la série des déformations du ressort dans les positions successives de non-glissement de la brique.
- Q24 6. À partir de quel angle, noté  $\theta_1^+$ , la condition de non-glissement  $|\vec{T}| \leq \mu_s |\vec{N}|$  n'est-elle plus vérifiée ? (On rappelle qu'initialement le ressort est détendu.)
- Q25 7. Pour cet angle, déterminer la nouvelle valeur d'équilibre  $x_1^+$  en fonction de  $\theta_1^+$ ,  $P$  et  $k$ . (On rappelle que  $\mu_d = 0$ , la masse est uniquement soumise au poids, à la force du ressort et à la partie normale de la réaction).

- Q26 8. On augmente l'angle d'inclinaison ; un nouveau glissement apparaît pour l'angle  $\theta_2^+$ . En utilisant la même méthode que précédemment, établir la relation entre  $\theta_1^+$ ,  $\theta_2^+$  et  $\mu_s$ .  
On pourra commencer par établir la relation entre  $x_1^+$ ,  $\theta_2^+$  et  $\mu_s$  puis remplacer  $x_1^+$  par son expression en fonction de  $\theta_1^+$ .
- Q27 9. Montrer en s'inspirant des questions précédentes que pour chaque  $x_i^+$  il existe un intervalle  $[\theta_i^+, \theta_{i+1}^+]$  de non-glissement ; on établira la relation de récurrence liant  $\theta_i^+$  et  $\theta_{i+1}^+$ . Vers quelle valeur limite tend la différence  $\theta_{i+1}^+ - \theta_i^+$ .
10. On effectue maintenant le parcours inverse en partant de la verticale. On note  $\theta_i^-$  et  $x_i^-$  les angles successifs de glissement et les positions d'équilibre correspondantes.
- Q28 Étudier comme à la question précédente la succession des valeurs d'arrêt  $x_i^-$ .
- Q29 11. Représenter sur un même graphe du plan  $(\theta, x)$  les paliers d'arrêt successifs  $x_i^+$  à inclinaison croissante puis  $x_i^-$  à inclinaison décroissante ; on pourra utiliser le fait que les points  $(\theta_i^+, x_i^+)$ ,  $(\theta_i^-, x_i^-)$ ,  $(\theta_{i+1}^+, x_{i+1}^+)$  et  $(\theta_{i+1}^-, x_{i+1}^-)$  se situent sur des courbes simples. On prendra  $P/k = 0,1$  m et  $\mu_s = 0,3$ . Commenter le résultat.